შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14 | 01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 4 | გვერდი № 1

დავარქვათ (a, b) წყვილის შეცვლას $(b+1, a)$-ით 1 ტიპის ოპერაცია (სვლა) ხოლო $(a-1, a)$-ით შეცვლას 2 ტიპის ოპერაცია (სვლა). თუ მოცემული რიცხვებია $a_1; a_2; \dots a_n$. $\max(a_1; a_2; \dots a_n) = c$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = S$. ახლა ვაჩვენოთ რომ ~~[illegible]~~ რაოდენ დიდი რაოდენობის სვლა არ უნდა გავაკეთოთ, ვერცერთი რიცხვებიდან $(a_1; a_2; \dots a_n)$ ვერ გახდება c-ზე დიდი. დავუშვათ საწინააღმდეგო. თუ რაღაც მომენტში რომელიმე a_i - მეტი გახდა c-ზე, ცხადია ეს იქნებოდა 1 ტიპის ოპერაციის შედეგად. ანუ რადგან $a > a_i$ და $a_i + 1 > c$ გამოდის $a > c$. ანუ სანამ უკვე არსებულა c-ზე დიდი რიცხვი, არადა ჩვენ ავიღეთ პირველი მომენტი როცა რომელიმე a_i პირველად აჭარბებდა c-ს. მივიღეთ წინააღმდეგობა. რადგან ვერცერთი a_i - c-ს ვერ აჭარბებს გამოდის რომ რაც არ უნდა ბევრი სვლა გავაკეთოთ $S \le n \cdot c$ (S-ით აღნიშნულია სვლების მერე გამოწვეული ცვლი-

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/392

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

ბოლოს ემატება მოცემული ჯამი, ამიტომ სულ ...

ახლა დავაკვირდეთ რას უდრის ... ოპერაციის ჯამს. თუ ვირჩევთ (a, b) წყვილს, ... (a, b) წყვილის ... ჯამს დავარქვათ k.

ანუ ... ჯამი იქნება $(a+b+k)$.

1 ოპერაცია ჯამს უცვლის ... $(a+b+k+1)$ ანუ მას ზრდის 1-ით.

2 ოპერაცია $(2a+k-1)$ რადგან $a \geq b+1$.

$$2a+k-1 \geq a+b+k.$$

ცხადია მხოლოდ ... შემთხვევაში ... როცა $a=b+1$-ს, წინააღმდეგ შემთხვევაში 2 ოპერაცია 1-ით მეტს ზრდის ჯამს.

... რომ 1 ... ... , რადგან $S \leq n \cdot c$ ... ... რომ ... 2 ... ... 2 ... ... მხოლოდ ... შემთხვევა როცა ჯამი ... ანუ $a=b+1$-ია.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 4

გვერდი № 3

რადგან 1 წრიდან ოპტიმალური სვლებით ფუნქცია ყველა სხვა რიცხვიდან სვლის ქმედება არის გვექნება. განვიხილოთ ეს მიმდევრობა ანუ ვაწყობთ მხოლოდ 2 წრიდან სვლებს თანაც ისე რომ ჯამს არ ვცვლით. ანუ გვაქვს $a = b+1$.

$a_1, a_2, \dots, b+1, a_k, a_{k+1}, \dots, b, \dots$
ოპტიმალური ქმედება

$a_1, a_2, \dots, b, a_k, a_{k+1}, \dots, b+1, \dots$
ანუ ეს სვლა მხოლოდ 2 რიცხვს ეხება ჯამის. ან მხოლოდ ამ ქმედებების რაც მიიღება მეტის. ჩვენ იმის მიღწევა მეტობა სხვა რიცხვიდან სვლის ქმედება. ეს ნიშნავს, რომ იქნება დალაგებული, ანუ ვერ მოვძებნით ისეთ a და b რომ $a > b$ და a-ს b-ს მიყვება.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

დავუშვათ m-ის და n-ის უსგ-ა d.

ანუ $m=d\cdot k$, $n=d\cdot q$. $(k,q)=1$.

$(d^2k^2+dq)(d^2q^2+dk)=2(dk-dq)^3$.

$\cancel{d^2}(dk^2+q)(dq^2+k)=2d^{\cancel{3}}(k-q)^3$.

$d^2k^2q^2+dk^3+dq^3+qk=2dk^3-6dk^2q+6dq^2k-2dq^3$

$d^2k^2q^2+qk=dk^3-6dkq(k-q)-3dq^3$. (1).

ვამოწმებთ მარცხენა მხარე იყოფა q-ზე. ე.ი. მარჯვენაც იყოფა, ანუ $(dk^3)\vdots q$. რადგან $(k,q)=1$

$d\vdots q$

ვამოწმებთ მარცხენა მხარე იყოფა k-ზე ანუ $(3dq^3)\vdots k$, $(3d\vdots k)$. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა როცა $(3,k)=1$. ანუ $(d\vdots k)$. თუ განვიხილავთ (1)-ს

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/392

ამოცანა № 6

გვერდი № 2

შევნიშნოთ რომ q.k უნდა იყოფოდეს d-ზე. ვაჩვენოთ რომ ეს შეუძლებელია. ამის ვაჩვენოთ რომ m-სა და n-ს ვერ ექნება ერთი და იგივე განსხვავებული მარტივი მამრავლი. დავუშვათ m-ს აქვს ისეთი მარტივი მამრავლი p-რომელიც არ აქვს n-ს. აქაც 2 ვარიანტი.

1) d ჰყოფს p-ს ამ შემთხვევაში n არ იყოფა d-ზე.

2) d არ ჰყოფს p-ს ანუ k მაინც ჰყოფს p-ს ამ შემთხვევაში კი d არ იყოფა k-ზე.

ანალოგიური შემთხვევა n-ს რომ ჰქონდეს განსხვავებული მარტივი მამრავლი. დამტკიცდა რომ n-ს და m-ს აქვთ ერთი და იგივე მარტივი მამრავლები ანუ.

$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_x^{\alpha_x} = d \cdot k \qquad d \vdots k$

$n = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_x^{\beta_x} = d \cdot q \qquad d \vdots q$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14.

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 6

გვერდი № 3

ჩავთვალოთ $(d:k)$ ამიტომ ~~ცხადია რომ d-მ რომელიც~~
~~უნდა „წაიღოს" ოთხივე მარტივი გამყოფის ნახევარს~~
~~ნაწილი ვერ ან ... (რაც მიიღება ნახევარ~~
~~მარტივების ... და ...). ავიღოთ~~ ცხადია
რომ d უნდა შეიცავდეს ყველა მის მარტივ გამყოფს
წინააღმდეგ შემთხვევაში თუ რაიმე მარტივი გამყოფი
p არ შედის d-ში მაშინ ცხადია $(k:p)$ და $(q:p)$
ანუ k და q ურთიერთმარტივი არ იქნება. შესაბამისად
სხვა ეს ნიშნავს შემდეგს

$$d = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_n^{x_n}.$$

რაც შეეხება რიცხვებს $x_1, x_2 \ldots x_n$. ცხადია რომ
d k და q უნდა შეიცავდნენ განსხვავებულ მარტივ
გამყოფებს. ანუ d-მ $n-r$
უნდა მოიცავდეს მარტივ გამყოფებს და r-ს ... ერთადერთი.
ეს ნიშნავს რომ როცა t-მდე d-უნდა შეიცავს

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 6

გვერდი № 4

ვთქვათ $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ არის $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_x^{\alpha_x}$
$n = p_1^{\beta_1} \dots p_x^{\beta_x}$ $d = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_x^{\min(\alpha_x,\beta_x)}$

ახლა რომ $k = p_1^{\alpha_1-\min(\alpha_1,\beta_1)} \dots p_x^{\alpha_x-\min(\alpha_x,\beta_x)}$

$q = p_1^{\beta_1-\min(\alpha_1,\beta_1)} \dots p_x^{\beta_x-\min(\alpha_x,\beta_x)}$.

~~ცხადია საიდან $d \vdots q$~~ შევნიშნოთ რომ ერთ-ერთი $(\alpha_i - \min(\alpha_i,\beta_i))$ და $(\beta_i - \min(\alpha_i,\beta_i))$ ... უდრის 0-ს. ანუ $k\cdot q$ ნამრავლში p_i-ს ხარისხში ერთ-ერთი იქნება. ვთქვათ ეს $\alpha_i - \min(\alpha_i,\beta_i) = \alpha_i - \beta_i$ (ანუ მინიმუმი β_i-ა). საიდან $k\cdot q \vdots d$ გამოდის რომ p_i-ს ხარისხის მაჩვენებელი $k\cdot q$ ნამრავლში მეტი ან ტოლი p_i-ს ხარისხის მაჩვენებლის d-ში. ე.ი. $\alpha_i - \beta_i \geq \beta_i$ $\alpha_i \geq 2\beta_i$ (3)

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 6

გვერდი № 5

და ასე ვიცით მხოლოდ სადაც $\alpha \vdots k$

$\beta_i \geqslant \alpha_i - \beta_i$ $2\beta_i \geqslant \alpha_i$ (4).

(3) და (4) ერთად გვაძლევს მხოლოდ მაშინ არის

$2\beta_i = \alpha_i$ ეს ის შემთხვევაა როცა არის $\min(\alpha_i, \beta_i) = \beta_i$

თუ $\min(\alpha_i, \beta_i) = \alpha_i$ მაშინ ცხადია $2\alpha_i = \beta_i$

გამოდის m-ს და n-ს აქვს შემდეგი სახე

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t} \cdot p_{t+1}^{2\alpha_{t+1}} \cdots p_x^{2\cdot\alpha_x}$$

$$n = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\cdot\alpha_2} \cdots p_t^{2\alpha_t} \cdot p_{t+1}^{\alpha_{t+1}} \cdots p_x^{\alpha_x}.$$

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t} = Q$$

$$p_{t+1}^{\alpha_{t+1}} \cdots p_x^{\alpha_x} = M$$

$$m = Q \cdot M^2 \quad n = Q^2 \cdot M.$$

რაც [illegible] [illegible].

$$(Q^2M^4+Q^2M)(Q^4M^2+QM^2)=2(QM^2-Q^2M)^3.$$

$$Q^3\cancel{M^3}(M^3+1)(Q^3+1)=2Q^3\cancel{M^3}(M-Q)^3.$$

$$(M^3+1)(Q^3+1)=2(M-Q)^3$$ სწორია $M \geq Q$.

ამიტომ:

$$Q^3+1 \geq 2$$

$$M^3+1 > (M-Q)^3.$$

ე.ი. $(Q^3+1)(M^3+1) > 2(M-Q)^3$. და ტოლობა არ სრულდება

ანალოგიურად შემოწმდება როცა $k \vdots 3$, ანუ d წილადი არ გვაქვს k-ზე. ამ შემთხვევაში $m=dk-l$ შეიძლება ჩავსვათ $m=3dk$ და ანალოგიურად.