



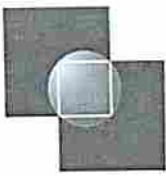
მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

დავაჩქვათ (b, a, b) წყვილის შესვლას $(b+1, a)$ -ით 1 ციანს
 მწეხარია (სვ) ხოლო $(a-1, a)$ -ით შესვლას 2 ციანს მწე-
 ხარია (სვ). თუ მოცემულა ჩიცხვებია a_1, a_2, \dots, a_n .
 $\max(a_1, a_2, \dots, a_n) = c$, $\sum_{i=1}^n a_i = S$. ახლა ვაჩქენთ
 რომ ~~ახალი~~ ხომენ დიდი ხომენობის სვლა ახ ყუნდა
 ვადაბერთით, ვეჩქეჩით ჩიცხვებიდან (a_1, a_2, \dots, a_n) ვეჩ
 ვახებია c -ზე დიდი. დავუშვათ სანინალმდეგო.
 თუ ხადაც მომენცში ხომელიძე a_i - ბეჭი ვახდა
 c -ზე, ცხადია ეს იქნებოდა 1 ციანი მწეხარის შესვლი.
 ანუ ხადგან $a > a_i$ და $a_i + 1 > c$ ვამოდის
 $a > c$. ანუ სიაში უახვე აჩსებულა c -ზე დიდი
 ჩიცხვი, ახადა ჩვენ ვიოლეა აჩქველი მომენცია
 ხოცა ხომელიძე a_i აჩქველად აჯახებოდა c -ს.
 მოვლიე ნინალმდეგობა. ხადგან ვეჩქეჩით a_i - c -ს ვეჩ
 აჯახებეს ვამოდის რომ ხაც ახ ყუნდა ბეჭი სვლა ვადაბერთით.
 $S \leq n \cdot c$ (S -ია აღნიშნული სვლების ბეჭი ვამინვეული სვლიე-



მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

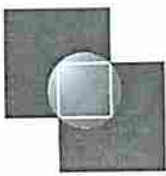
გების ტყდებ მოღებულ ჯამ, აიიოულ სვლს მუხუ
ახლა დავაკვირებთ ხას უმვება აიიოულ მწესა
ჯამს. თუ ვიხევა (a, b) წყვლს, მისეებლ მიტნე-ბ
 (a, b) წყვებლ ვახტე ახლებ ჯამს დავახევა k .
ახუ სუბს ჯამ იწება $(a+b+k)$.

1 მწესა ჯამს ტსვლს ტყდებნახე $(a+b+k+L)$
ახუ მს ვახლს L -ია.

2 მწესა $(2a+k-L)$ სგან $a \geq b+L$.
 $2a+k-L \geq a+b+k$.

ცოლბ მბოლ-ე აბ ტმბხევაბ მბლწება ხოცა
 $a = b+L - L$, წინააღმდეგ ტმბხევაბ 2 მწესა L
 L -ია მბინე ვახლს ჯამს.

ვამბლს ხმბ 1 წინს სვლებს უახხებოპ ვეი გვაბ-
ხებლბ, სგან $S \leq h \cdot c$ დგახს დავამწესოთ ხმბ მუ
2 წინს სვლებს ვახხებლბ უახხებოა. 2 წინს
სვლებბან h სინტეხსოა მბოლ-ე აბ ტმბხევა
ხოცა ჯამ ახ ისვობ ახუ $a = b+L$ ბ.



მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 4

გვერდი № 3

ჩვენს k წინა მრავალს სწავლის უკლებ
 ლადა სხვა სიღრმის სკოლის ტურებში არა
 გვეხება. განვიხილოთ ეს მიზნით ანუ ვაჩვენო
 მხოლოდ 2 წინა სკოლის ანაი ისე რომ ვაჩვენ
 ან ვაჩვენო. ანუ ვაჩვენო $a = b + 1$.

$a_1, a_2, \dots, b + 1, a_k, a_{k+1}, \dots, b, \dots$
 მრავალს ტურებ

$a_1, a_2, \dots, b, a_k, a_{k+1}, \dots, b + 1, \dots$
 ანუ ეს სკოლა მხოლოდ 2 სკოლს აღიარებს.

ან მხოლოდ ამ ტურებში სკოლა აღიარებს. ეს ნიშნავს, სკოლა
 ტურისთვის მხოლოდ აღიარებს. ეს ნიშნავს, სკოლა
 სხვა სიღრმის სკოლის ტურებში სკოლა აღიარებს. ეს ნიშნავს, სკოლა
 არის დადებული, ანუ ვეძებთ ამ ტურში ისე რომ
 რომ $a > b$ და a - იყო $b - 1$ მიხედვით.



მაგიდა № 19

01.05.2013/ მათ/IV/ 302

ამოცანა №

6

გვერდი №

1

დავუშვათ m -ის და n -ის უსვია d .

ანუ $m = d \cdot k$, $n = d \cdot q$. $(k, q) = 1$.

$$(d^2 k^2 + dq)(d^2 q^2 + dk) = 2(dk - dq)^3$$

$$d^2(dk^2 + q)(dq^2 + k) = 2d^3(k - q)^3$$

$$d^2 k^2 q^2 + dk^3 + dq^3 + qk = 2dk^3 - 6dk^2q + 6dq^2k - 2dq^3$$

$$d^2 k^2 q^2 + qk = dk^3 - 6dkq(k - q) - 3dq^3 \quad (1)$$

გამოხსნებულს მიხედნა მხს უოგა q -ზე. ა.ი.
მიტვიენა უოგა, ანუ $(dk^3) : q$. სეგნ $(k, q) = 1$

$$d : q$$

გამოხსნებულს მიხედნა მხს უოგა k -ზე, ანუ

$$(3dq^3) : k, (3d : k)$$

მიტვიენა უოგა, ანუ $(d : k)$. ანუ განვიხილავთ (1)



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/392

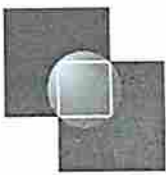
ამოცანა № 6

გვერდი № 2

შევიჩინოვოთ h and q, k უნდა იყოს d -ზე. ვახვენო
 h and q (მოდული). ზუსტად ვახვენოთ h and m -სა და
 h -ს ვახ ეწევა ჯამდნობისგან განსხვავებული მახლო
მაძივი. დავუძვარ m -ს აქვს ისეთი მახლოვი მაძივი
 P -ს მძელს ახ აქვს h -ს. ახალ 2 ვახიანვი.
1) d ზისავს p -ს ამ ტმანხვევაში h ახ ვიყოფა
 d -ზე.
2) d ახ ზისავს p -ს ახ k მაღონარ ზისავს p -ს.
ამ ტმანხვევაში ვი d ახ ვიყოფა k -ზე.
~~შ~~ ახლოვიერ ტმანხვევა h -ს h and q განსხვავებულ
მახლოვი მაძივი. დამწმინდა h and h -სა და m -ს
 h and q იგივე მახლოვი მაძივიერ სვა. ~~ა~~

$$m = P_1^{d_1} \cdot P_2^{d_2} \dots P_x^{d_x} = d \cdot k \quad d : k$$

$$h = P_1^{p_1} \cdot P_2^{p_2} \dots P_x^{p_x} = d \cdot q \quad d : q$$



მაგიდა № 14.

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 6

გვერდი № 3

~~ჩვენ $(d:k)$ ახლა უნდა უნდა d -მ m -ს უნდა
 უნდა "მათემატიკის" თეორიული მათემატიკის მათემატიკის
 ნახევარზე მეტი ან ცოცხალი (იძის მათემატიკის ნახევარზე
 მათემატიკის უნდა უნდა). ახლავე უნდა
 ჩვენ d უნდა უნდა უნდა მათემატიკის
 ნახევარზე მეტი d -მ m -ს უნდა მათემატიკის
 უნდა k და p მათემატიკის უნდა $(k:p)$ და $(p:p)$
 უნდა უნდა უნდა უნდა უნდა უნდა

$$d = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n}$$
 უნდა უნდა უნდა x_1, x_2, \dots უნდა უნდა
 d k და p უნდა უნდა უნდა უნდა უნდა
 უნდა უნდა უნდა d -მ m -ს და k -ს უნდა უნდა
 უნდა უნდა უნდა უნდა უნდა უნდა უნდა
 უნდა უნდა უნდა უნდა უნდა უნდა უნდა~~



მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 6

გვერდი № 4

$h = p_1^{\beta_1} \dots p_x^{\beta_x}$ $d = p_1^{\min(d_1, \beta_1)} \dots p_x^{\min(d_x, \beta_x)}$ $m = p_1^{d_1} \dots p_x^{d_x}$
 $k = p_1^{d_1 - \min(d_1, \beta_1)} \dots p_x^{d_x - \min(d_x, \beta_x)}$ $q = p_1^{\beta_1 - \min(d_1, \beta_1)} \dots p_x^{\beta_x - \min(d_x, \beta_x)}$

~~ახლა ჩვენ~~ $d = q$ ტყუილია. k და q -ს
 $(d_i - \min(d_i, \beta_i))$ და $(\beta_i - \min(d_i, \beta_i))$ უნდა იყოს
 უკლებლად 0-ის. ანუ k და q ნამსვრავი p_i -ის
 ხელხში ემყარება ესაა. მაგნი. ვაჩუკა ესაა
 $d_i - \min(d_i, \beta_i) = d_i - \beta_i$ (ანუ პირველი β_i -სთვის).
 ანუ $k \cdot q = d$ უნდა იყოს p_i -ის ხელხში უკლებლად
 ნული k და q ნამსვრავი უნდა იყოს p_i -ის ხელხში
 უკლებლად 0-ის. ანუ $d_i - \beta_i \geq \beta_i$ $d_i \geq 2\beta_i$ (3)



მაგიდა № 14

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა №

6

გვერდი №

5

ეს შუა ზოგს მხოვ სეგან $d : k$ ~~სეგან~~

$$\beta_i \geq d_i - \beta_i \quad 2\beta_i \geq d_i \quad (4)$$

(3) და (4) ეხაპ შესყდეპ მხოპრ შან სოც

$2\beta_i = d_i$ ეს ის შემავეკა იყო სოც $\min(d_i, \beta_i) = \beta_i$

ეს $\min(d_i, \beta_i) = d_i$ შან სხაღა $2d_i = \beta_i$
ვაძოპლ $m-h$ და $h-l$ აქა შემეგა სხე

$$m = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdots p_t^{d_t} \cdot p_{t+1}^{2d_{t+1}} \cdots p_x^{2d_x}$$

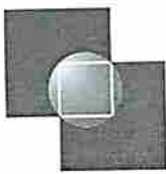
$$n = p_1^{2d_1} \cdot p_2^{2d_2} \cdots p_t^{2d_t} \cdot p_{t+1}^{d_{t+1}} \cdots p_x^{d_x}$$

$$p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdots p_t^{d_t} = Q$$

$$p_{t+1}^{d_{t+1}} \cdots p_x^{d_x} = M$$

$$m = Q \cdot M^2 \quad n = Q^2 \cdot M$$

სესეკა. მოცეპე ცოცქქ



მაგიდა № 19

01.05.2013/ მათ/IV/ 392

ამოცანა № 6

ბვერი № 6

$$(Q^2M^4 + Q^2M)(Q^4M^2 + QM^2) = 2(QM^2 - Q^2M)^3.$$

$$\cancel{Q^3M^3} (M^3 + 1)(Q^3 + 1) = 2\cancel{Q^3M^3} (M - Q)^3.$$

$$(M^3 + 1)(Q^3 + 1) = 2(M - Q)^3. \quad \text{ცხადია } M \geq Q.$$

აქედან:

$$Q^3 + 1 \geq 2$$

$$M^3 + 1 > (M - Q)^3.$$

∴ $(Q^3 + 1)(M^3 + 1) > 2(M - Q)^3$. და ყოლან M Q -ის

ანალოგიურა ჭრახვევა ხოცა $k: 3$,
ანა d ჭრახვე M Q -ის k -ზე. ამ ჭრახვევათ
 $m = d \cdot k - 1$ ჰგვიხე k $m = 3dk$ და ანალოგიურა.