შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

01.05.2013/ მათ/IV/ 374

ამოცანა № 4

გვერდი № 1.

ვაჩვენოთ, რომ თუკი წყვილთა S სიმრავლეში რაიმე სიდან $a>b$-ზე და ოპერაციას ვაკეთებთ $(a;b)$-ზე, ყოველი სხვა წყვილი შემდეგ ვერ...

დავუშვათ შევცვალეთ $(a;b)$ და დავწერეთ $(b+1;a)$.
ცხადია $(b+1;a)$-ზე ვერ შევცვლით, რადგან $a>b \Rightarrow a \geq b+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow b+1$ არის ნაკლები a-ზე. $\Rightarrow$ სიმრავლე მინიმუმ S შემცირდა 1-ით

ე ოპერაციას ვატარებთ ~~(a;~~ $(a;x)$-ზე და $x \notin (a;b) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ისევ შევცვლით, რადგან ე $x \in (a;b)$ მაინც ვერ შევცვლით. ~~ამიტომ~~
~~S სიმრავლე მინიმუმ 1-ით შემცირდა.~~
ე ოპერაციას ვატარებთ $(b;x)$-ზე, ცხადია $(b+1;x)$-ზეც შევცვლით.
ე ოპერაციას ვატარებთ $(x;b)$-ზე მაშინ ცხადია b-ს ადგილზე დავწერთ
და $b+1$-ს დაწერთ S არ შეიცვლება.
ე თუ მივიღებ, რომ $(x;a)$-ზე ვერ შევცვლით და ახლა შევცვლით. $\Rightarrow$ $(b+1;x)$-ზე ვერ შევცვლით
$\Rightarrow$ $(x;b)$-ზე შევცვლით რადგან ~~და ახლა შევცვლით და ...~~ $\Rightarrow$ S-ს არ შეიცვლება
ცხადია $(x;b)$-ზე ე ვერ შევცვლით ახლა $(x;b+1)$-ზე შევცვლით
ცხადია $b+1$-ს დაწერთ ~~ვერ შევცვლით~~ a-ს ნაკლები ვერ შეიცვლება S-ში
ე ოპერაციას ვერ შევცვლით $(b;x)$-ზე და ახლა შევცვლით $(b+1;x)$-ზე $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $x \in (a;b)$-ს და მაინც $(a;x)$-ზე შევცვლით და ახლა ვერ შევცვლით $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ S არ იზრდება. მივიღეთ, რომ $(a;b)$-ს ნაცვლად $(b+1;a)$-ს დაწერა
S ამცირებს 1-ით მინიმუმ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 4 15

01.05.2013/ მათ/IV/ 374

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

ე $(a;b)$ შეიცავს $(a-1;a)$. ცხადია $a-1<a-b$, $\Rightarrow$ S 1-ით შემცირდა.

ანალოგიური მსჯელობით ვაჩვენებთ.

ე ოპერაცია ვასრულებთ $(a;x)$-ზე მაშინ ცხადია ე $x\notin(a;b)$ - ამით [illegible] შეიცვლება. [illegible] ე $x\in(a;b)$-ს ამით შეიცვლება $\Rightarrow$ S არ იზრდება

ე ოპერაციას ვასრულებთ $(x;a)$-ზე ცხადია ამითაც შეიცვლება.

ე ოპერაციას ვასრულებთ $(b;x)$-ზე ცხადია $(a;x)$-ზე შეიცვლება.

ე ოპერაციას ვასრულებთ $(x;b)$-ზე მაშინ ცხადია S არ გაიზრდება

ე ოპერაციას არ ვასრულებთ $(a;x)$-ზე და ამით [illegible], მაშინ $\Rightarrow$ ცხადია S არ შეიცვლება. $\Rightarrow$ S არ იზრდება.

~~$\Leftarrow$ $x\in(a;b)$ $\Rightarrow$ $(x;b)$-ზე ვასრულებთ და [illegible]~~

ე ოპერაციას არ ვასრულებთ $(x;a)$-ზე და ამით [illegible]. $\Rightarrow$ $x\in(a;b)$ $\Rightarrow$ და არც $(a-1;x)$-ზე არ შეიცვლება.

$\Rightarrow$ $(x;b)$-ზე ვასრულებთ და ამით [illegible] $\Rightarrow$ S არ იზრდება.

ე ოპერაციას არ ვასრულებთ $(a;x)$-ზე ცხადია $(a-1;x)$-ზე არ შეიცვლება, [illegible] ე ოპერაციას არ ვასრულებთ $(x;a)$-ზე და ამით [illegible] $(x;a-1)$, მაშინ $(x;b)$-ზე ვასრულებთ და ამით $(x;a)$-ზე [illegible] შეიცვლება. $\Rightarrow$ S არ იზრდება,

~~ე ოპერაციას არ ვასრულებთ $(x;$~~ ამით [illegible] [illegible], [illegible]

~~ცხადია [illegible] [illegible] [illegible]~~

S [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $\Rightarrow$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $\Rightarrow$ ოპერაციას [illegible] შეიცვლება $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] არ [illegible].

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

01.05.2013/ მათ/IV/ 374

ამოცანა № 4

გვერდი № 3

$(a;b) \to (b+1;a)$ ე [illegible] [illegible] და [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible]
[illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] S-[illegible] არ [illegible], ვაჩვენოთ, რომ
$(b+1;x)$ [illegible] [illegible] ე [illegible] [illegible] [illegible], რომ $(x;a)$-ს [illegible] [illegible] და
[illegible] [illegible] $\Rightarrow x \in (a;b) \Rightarrow (x;b)$-ს [illegible] [illegible] [illegible] და $(b+1;x)$-ს [illegible]
[illegible], რადგან $b+1 \le a < x \Rightarrow$ S-ს არ [illegible]. ე ~~$(x;a)$-ს [illegible] [illegible]~~
~~[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]~~
ე ~~$(a;x)$-ს [illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
ე $b+1$-[illegible] [illegible] [illegible] $(b+1;x)$-ს [illegible] $\Rightarrow$ ~~$(a;x)$-ის~~ [illegible]

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

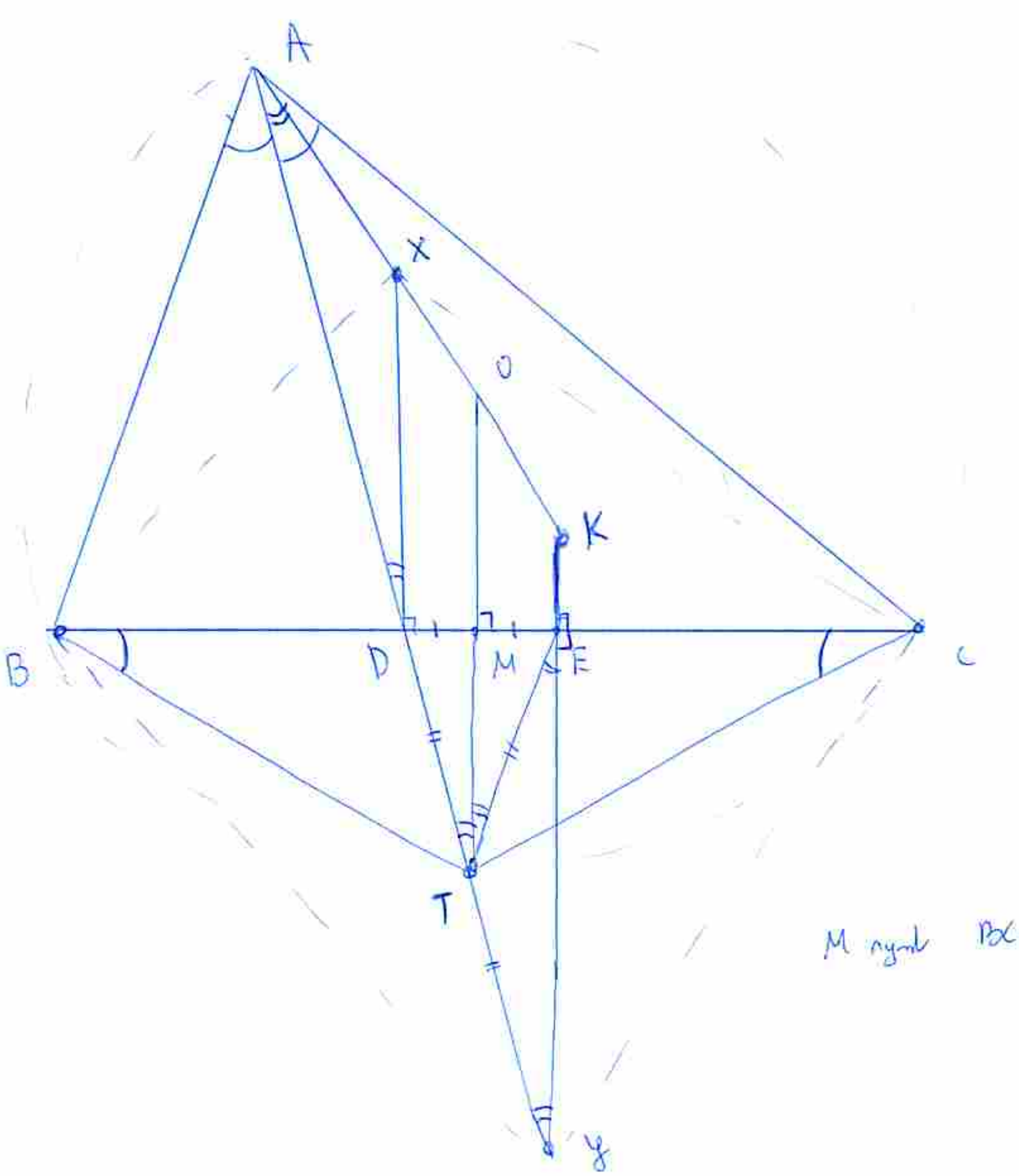
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

01.05.2013/ მათ/IV/ 374

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



M იყოს BC-ს შუაწერტილი.

ΔBAC-ზე შემოვხაზოთ წრეწირი. რადგან AD არის BC-ს T [illegible] => OM-ს

=> => OM არის T-ში, რადგან $DX \parallel OM \parallel EY$ =>

$\Rightarrow \angle ATO = \angle TAO$, რადგან $AO = OT$ $\angle ATO = \angle ADX = \angle AYE$

$AO \cap YE = K$. => $AK = KY$.

$AX = XD$.

$\angle DAX = \alpha \Rightarrow \angle ADX = \alpha \Rightarrow \angle MTE = \alpha$, რადგანაც $DM = MF$ და $MT \parallel EY$ =>

$\angle TEY = \alpha = \angle TAK$ =>

$\Rightarrow DT = TY \Rightarrow ET = DT = TY$

=> TAKE ციკლურია.

$\left.\begin{array}{l}\angle CTE = \angle PAC \\ \angle TEC = \angle ADC\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CET \sim \Delta ADC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CE}{AD} = \frac{ET}{DC} = \frac{CT}{AC}$.

$\frac{AD}{DC} \quad AB$ $\quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ბისექტრისის თვისებით.

M გამოდის BXCY-ს ცენტრი, რადგან $MX = MY$ და $BM = MC$ და

$MX = BM$.

$\angle XBY$ გამოდის 90°, ანალოგიურად $\angle XCY = 90^\circ$ =>

=> BXCY ციკლურია.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15	01.05.2013/ მათ/IV/ 374
ამოცანა № 6	გვერდი № 1

$(m^2+n)(n^2+m)=2(m-n)^3$ ცხადია $m>n$-ზე.

ვთქ $(m;n)\equiv d \Rightarrow m=dm_1 \quad n=dn_1$, სადაც $(m_1;n_1)=1$.

$$(d^2m_1^2+dn_1)(d^2n_1^2+dm_1)=2d^3(m_1-n_1)$$

$$(dm_1^2+n_1)(dn_1^2+m_1)=2d(m_1-n_1)$$

სიმარტივისთვის $m_1\equiv x \quad n_1\equiv y$, სადაც $x>y$ და $(x,y)=1$

$$(dx^2+y)(dy^2+x)=2d(x-y)^3$$

დავუშვით $x-y \vdots p^d \Rightarrow (dx^2+y)(dy^2+x) \vdots p^{3d} \Rightarrow$

$\Rightarrow (dx^2+y)(dy^2+x) \vdots p$, რადგან $x\equiv y \Rightarrow dx^2+x \vdots p$ და $dy^2+y \vdots p$.

ვნახოთ, როცა $x-y\equiv 1$. ე $x=y+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (d(y+1)^2+y)(dy^2+y+1)=2d$, რაც წინააღმდეგობაა, რადგან

$d(y+1)^2+y>2d$, რადგან $y\neq 0$. $\Rightarrow$ $x-y$ უნდა ჰქონდეს მარტივ p-ზე. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx^2+y \vdots p^2 \\ dy^2+x \vdots p^2 \end{cases}$$