შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

01.05.2013/ მათ/IV/ 369

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

ვთქვათ ეს მიმდევრობა $a_1, a_2, \dots, a_n$ [illegible] A_n.

$a_i > a_j$, $i<j$. $(a_i, a_j) \to (a_j+1, a_i)$; $(a_i, a_j) \to (a_i-1, a_i)$.

$a_i' + a_j' = a_i + a_j + 1 > a_i + a_j$

$a_i' + a_j' = 2a_i - 1 \geq a_i + a_j$.

ანუ ჯამი არის [illegible] კლებულობს. $a_i' \le a_j'$

$a_j + 1 \le a_i$, $a_i - 1 < a_i$, $a_j' > a_j$

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ [illegible] პროცესი. [illegible] $f(i,j)$, $i<j$, რომ (a_i, a_j) წყვილი უსასრულოდ ბევრჯერ [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible], [illegible] [illegible] [illegible], რომელიც [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] A_n [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible], რომ [illegible] II [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] (a_i, a_j)-ზე [illegible] [illegible] უსასრულოდ ბევრჯერ, [illegible] [illegible] t-ური [illegible], რომლის [illegible] [illegible] (a_x, a_y) წყვილი არ [illegible] [illegible], სადაც $x < i$. [illegible] [illegible] t [illegible]. [illegible] [illegible], რომ a_k-ური [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] (a_x, a_k) [illegible]. $x<k$. [illegible] t-ური [illegible] [illegible] a_i-ს [illegible] [illegible] [illegible]. (a_i, a_j)-ზე, [illegible] [illegible] I [illegible] [illegible], [illegible] (a_i', a_j'), რომ $a_i' \le a_j'$. [illegible] [illegible] [illegible] უსასრულოდ ბევრჯერ [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] a_i' [illegible]

გაიზრდება, რაც [illegible] რომ არ [illegible] a_j-ით
[illegible] შემდეგ [illegible] ოპერაციის [illegible]. თუ კი a_j-ს შემდეგ
რიგში [illegible] (a_j, a_x) ოპერაცია, სადაც $j < x$.
თუ კი [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] ოპერაცია:
$\sum_{i=j+1}^{n} a_i$ იზრდება, რადგან [illegible] [illegible] [illegible]
არის a_j-ს შემდეგ [illegible], როდესაც [illegible] (a_x, a_j).
$x < j$. ან $\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_i\right)$ მცირდება. რადგან [illegible] თუ [illegible]
a_j [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] a_i-დან ~~[illegible]~~ [illegible]
a_j-მდე, [illegible] [illegible] a_j-ს [illegible] [illegible]
[illegible], ან ეს ოპერაცია [illegible] [illegible] [illegible]
რ.დ.გ

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

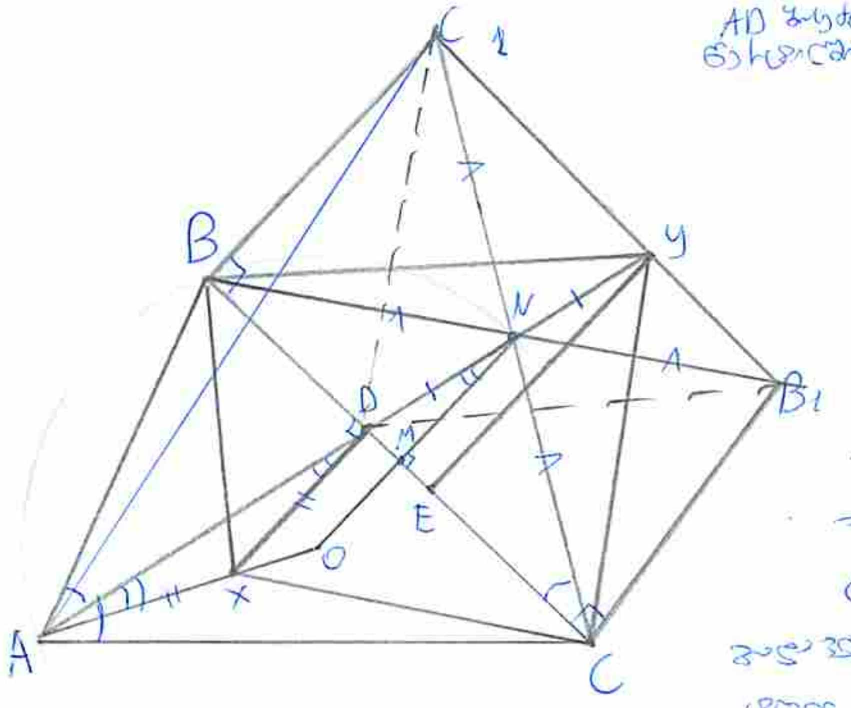
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

01.05.2013/ მათ/IV/369

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



AD ბისექტრისა [illegible] BC -ს შუა- [illegible]. [illegible] $ON \perp BC$.

$\triangle DEY$-ში:

$MN \parallel EY$, $DM = ME \Rightarrow$
$\Rightarrow ND = NY$.

$\angle BAN = \angle NAC \equiv \alpha$.

$\angle BNBC = \angle NCB = \alpha$.
$\Rightarrow NC^2 = ND \cdot AN \Rightarrow$
$\Rightarrow CN^2 = AN \cdot NY \Rightarrow$
$\Rightarrow BN^2 = AN \cdot NY$.

CN ~~[illegible]~~ და BN [illegible] [illegible] CN [illegible] = BN-ის [illegible] NC და NB_1 [illegible]. [illegible] C_1BCB_1 [illegible],

CYC_1D * და BYB_1D [illegible]

[illegible]. $CN^2 = AN \cdot NY \Rightarrow CN \cdot C_1N = AN \cdot NY \Rightarrow$
$\Rightarrow AC_1YC$ [illegible]. [illegible] [illegible]: $ABYB_1$.

$AO = ON \Rightarrow \beta \equiv \angle DAO = \angle ANO$. $DX \parallel NO \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOX = \angle ANO = \angle NOA \Rightarrow AX = XD$.

[illegible], რომ $\angle XBY = \angle XCY = 90° \Rightarrow$ ე.ი. $\angle C_1BY = \angle XBD$.

ე.ი. $\frac{XD}{BX} = \frac{C_1Y}{BC_1} \Rightarrow$ ე.ი. $\frac{AX}{BE} = \frac{BX}{EY}$.

ე.ი. $\angle YBN + \angle YCN = \angle ABX + \angle ACX$

$(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3$. ცხადია $m \equiv n \pmod 2$. $\Rightarrow$

[illegible] $\Rightarrow RHS \vdots 2\cdot 2^3 = 16$. $\Rightarrow LHS \vdots 16$.

და $x = m-n$. $\Rightarrow$

$((n+x)^2+n)(n^2+n+x) = 2x^3$.

ცხადია $n^2+n+x < 2x \Rightarrow n^2+n < x$. მაშინ:

$(x^2+2nx+x^2)(n^2+n+x) > 2x^3$.

$m^2n^2+mn+m^3+n^3 = 2m^3-2n^3-6m^2n+6mn^2$

$m^2n^2+mn = m^3-n^3-6mn(m-n)$. (1)

ე.ი. $m^3-n^3 \vdots mn$. $m = ak$, $n = bk$ და $(a,b)=1$.

$k^{\cancel{3(a^3-b^3)}}\vdots$

$(m-n)(m^2+n^2-mn) \vdots mn \Rightarrow (m-n)(m^2+n^2) \vdots mn \Rightarrow$

$\Rightarrow k(a-b)(a^2+b^2) \vdots ab$.

მაშინ [illegible] $(a,b)=1 \Rightarrow (a-b, ab)=1$, $(a^2+b^2; ab)=1$.

$\Rightarrow \boxed{k \vdots ab}$ ე.ი. $k \geq ab$.

(1)-დან [illegible] $m^2n^2(mn+1) \vdots m-n$.

$kab(k^2ab+1) \vdots (a-b)$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

01.05.2013/ მათ/IV/ 369

ამოცანა № 1

გვერდი № 1