შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

01.05.2013/ მათ/IV/ 345

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

[illegible] 2 რიცხვი $a;b$ მაშინ [illegible]
[illegible] თუ $a \leq b$ [illegible]
[illegible] თუ $a>b$ [illegible] თუ $(b+1;a)$
[illegible], რადგან $a>b$ $a \geq b+1$ და $b+1-a \leq 0$ ან $b+1 \neq a$
[illegible]
[illegible] $a-1;a$ [illegible]
[illegible] $n=2$ [illegible] $(n=1$ [illegible]$)$
[illegible] $n=k$ [illegible] $n=k+1$
~~[illegible]~~ [illegible] $(a;b) \rightarrow (b+1;a)$
[illegible] $(a-1;a)$
[illegible] a-[illegible] i-[illegible] b-[illegible] j-[illegible]
[illegible] i-[illegible] j-[illegible]
[illegible] j-[illegible]
[illegible] a-[illegible] $a>b$ [illegible] $b+1 \leq a$ და $a-1 \leq a$
~~[illegible] $(k+1)$ [illegible]~~ i-[illegible] 1-[illegible] $\exists (k+1)$ [illegible]
[illegible] $(k+1)$-[illegible]
~~[illegible]~~ [illegible] m [illegible]
[illegible] (m)-[illegible]
[illegible] ~~[illegible]~~
[illegible] (m)-[illegible]
k [illegible] m-[illegible]
[illegible]
$\neq$ [illegible] $\neq$
(m)-[illegible]
[illegible] $(a;b)$ [illegible] a-[illegible]
m-[illegible] 1-[illegible] $k+1$ [illegible]
[illegible]
[illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

01.05.2013/ მათ/IV/ 345

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

[illegible] ყველა რიცხვი [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible]
$\forall (k+1)$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible],

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

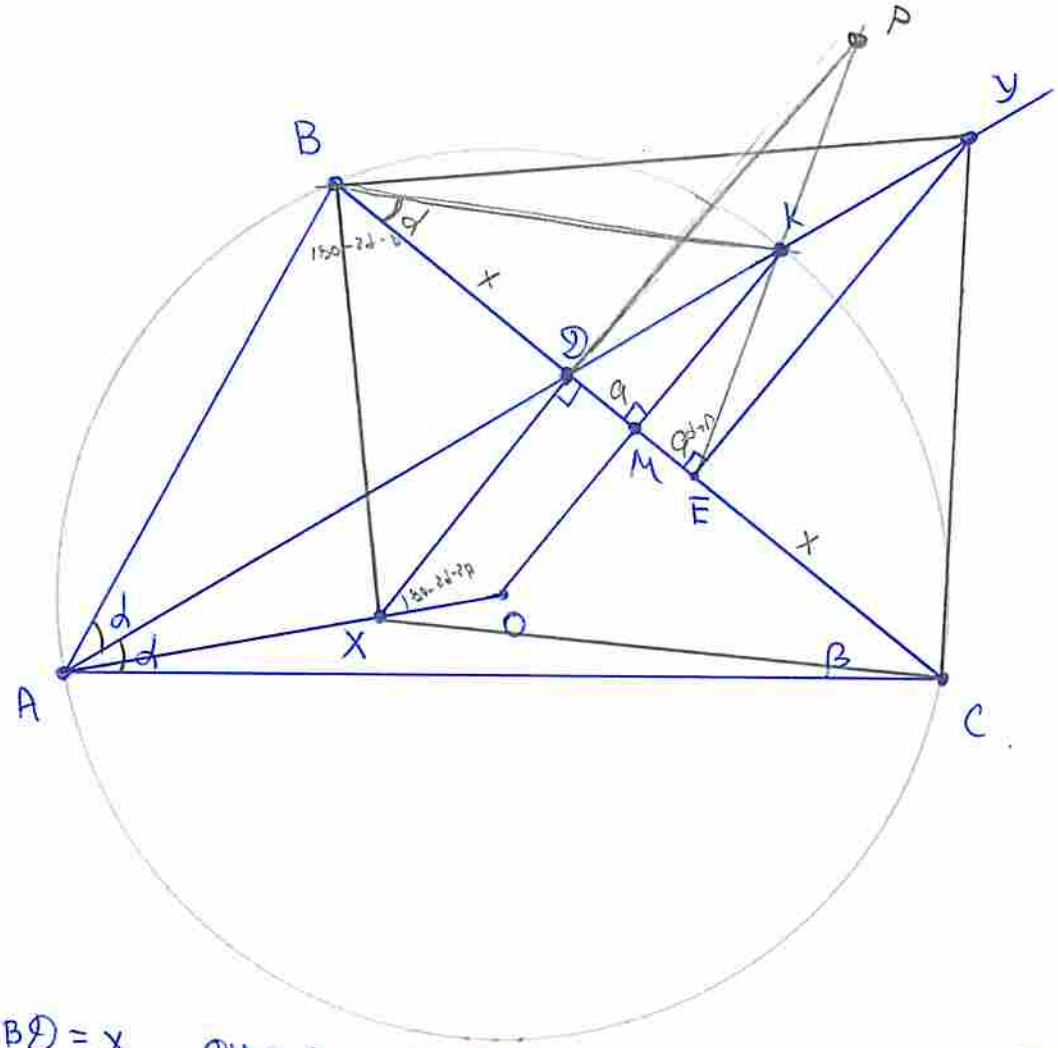
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

01.05.2013/ მათ/IV/ 345

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



$BD \equiv x$ $\quad DM \equiv a$ $\quad$ ~~$ME = a$ $EC = x$~~ $\quad$ რადგან $\breve{BK} = \breve{KC}$ ამიტომ

OK არის BC-ს შუამართობზე $\quad$ ასე $ME = a$ $\quad EC = x$ $\quad \angle KAC = \angle KAB \equiv \alpha$

$\angle KBC = \alpha$. $\quad$ გავაგრძელოთ XD EK-ს გადაკვეთამდე P-მდე

მაშინ $PD = EY$ $\quad$ ამიტომ $\triangle BDP = \triangle CEY$ და $\triangle PDC = \triangle YEB$

ანუ $\angle BPC = \angle BYC$ $\quad$ და $BBXCY$ ოთხ $\Leftrightarrow$ $BBXCP$ ოთხ $\quad$ გამომდინარე

მე-2 ხარისხის ხაზების დიდობიდან $\quad BD \cdot DC = XD \cdot DP$. $\quad \angle BCA \equiv \beta$

$\angle ABC = 180 - 2\alpha - \beta \qquad \angle BAO = 90 - \beta \qquad \angle BDX = 90^\circ \Rightarrow \angle DXO = 180 - 2\alpha - 2\beta.$

$DX = OM + a\,ctg(180 - 2\alpha - 2\beta) = OM - a\,ctg(2\alpha + 2\beta) = OB \sin(90 - 2\alpha) - a \cdot ctg(2\alpha + 2\beta) = R\cos 2\alpha - a\,ctg(2\alpha + 2\beta)$

$\angle BDA = \alpha + \beta = \angle KDE = \angle KED$ ანუ $DP = 2a\,tg(\alpha + \beta)$.

$DX \cdot DP = 2a\,tg(\alpha+\beta)\left(R\cos 2\alpha - a\,ctg(2\alpha + 2\beta)\right) =$

$= 2a\,tg(\alpha+\beta) R \cdot \cos 2\alpha - 2a^2\,tg(\alpha+\beta)\,ctg(2\alpha+2\beta) \qquad ctg(2\alpha+2\beta) = \frac{1-tg^2(\alpha+\beta)}{2tg(\alpha+\beta)}$

ანუ $2a\,tg(\alpha+\beta) \cdot R\cos 2\alpha - \cancel{2}a^2 \cancel{tg(\alpha+\beta)} \cdot \frac{1 - tg^2(\alpha+\beta)}{\cancel{2tg(\alpha+\beta)}} =$

$= 2a\,tg(\alpha+\beta) R \cos 2\alpha - (1 - tg^2(\alpha+\beta))a^2$

$1 + tg^2(\alpha+\beta) = \frac{1}{\cos^2(\alpha+\beta)} \qquad 1 - tg^2(\alpha+\beta) = \left(2 - \frac{1}{\cos^2(\alpha+\beta)}\right)$

[illegible] $a\,tg(\alpha+\beta) = MK = (x+a)\,tg\alpha$ [illegible]:

$tg\alpha \cdot 2R(x+a)\cos 2\alpha - 2a^2 + \frac{a^2}{\cos^2(\alpha+\beta)} = BD \cdot DC = x(2a+x)$

$\frac{2R(x+a)\cos 2\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{a^2}{\cos^2(\alpha+\beta)} = 2a^2 + 2ax + x^2.$

$2R\sin\alpha = BK$ $\qquad \frac{a^2}{\cos^2(\alpha+\beta)} = \left(\frac{a}{\cos(\alpha+\beta)}\right)^2 = DK^2$

$\frac{BK \cdot (x+a)\cos 2\alpha}{\cos\alpha} + DK^2 = a^2 + (a+x)^2.$

$\frac{BK(x+a)\cos 2\alpha}{\cos\alpha} + DK^2 - a^2 = (a+x)^2 \qquad \frac{BK(x+a)\cos 2\alpha}{\cos\alpha} + MK^2 = (a+x)^2$

$MK = (x+a)\,tg\alpha$ [illegible] $\qquad \frac{BK(x+a)\cos 2\alpha}{\cos\alpha} + (a+x)^2 tg^2\alpha = (a+x)^2$

$\cancel{\frac{BK(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\cos\alpha} + (a+x)\,tg^2}$ $\qquad BK = \frac{a+x}{\cos\alpha}$

$\cancel{(a+x)^2} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} + \cancel{(a+x)^2} tg^2\alpha = \cancel{(a+x)^2}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

01.05.2013/ მათ/IV/ 345

ამოცანა № 5

გვერდი № 3

$\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} + tg^2\alpha = 1.$ $\quad \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + tg^2\alpha = \cancel{1 - tg^2\alpha + 1}\ 1$

$1 - tg^2\alpha + tg^2\alpha = 1$ ~~რ~~ ანუ $MD \cdot DC = XD \cdot DP$

~~რ.დ.გ.~~ $\Leftrightarrow$ $MBXCP$ ოთხკუთხ ~~რ.დ.გ.~~ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $MBXCY$ ოთხკუთხ რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6	01.05.2013/ მათ/IV/ 345

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3 \qquad m^2n^2+m^3+n^3+mn = 2(m-n)^3.$

$mn(mn+1) = (m-n)^3 - m^3 + (m-n)^3 - n^3 \qquad mn(mn+1) = -n((m-n)^2+(m-n)\cdot m+m^2) +$

$+ (m-2n)((m-n)^2 + (m-n)\cdot n + n^2)$

$mn(mn+1) = (m-2n)(m^2-mn+n^2) - n(3m^2-3mn+n^2)$

$mn(mn+1) = (m-2n)\cdot\frac{m^3+n^3}{m+n} - n\left(\frac{m^3+n^3}{m+n} + 2m^2 - 2mn\right)$

$mn(mn+1) = (m-2n)\frac{m^3+n^3}{m+n} - n\cdot\frac{m^3+n^3}{m+n} - 2mn(m-n)$

$mn(mn+2m-2n+1) = (m-3n)\frac{m^3+n^3}{m+n}.$

$mn(m+n)(mn+2m-2n+1) = (m-3n)(m^3+n^3)$

$m, n \in \mathbb{N}$ ~~$(m,n)=d$ [illegible]~~

შევამჩნიოთ, რომ მოცემული ტოლობიდან ჩანს, რომ $m > n$. და m და n ერთდროულად ნატურალური რიცხ. დავუშვათ, რომ აქვს ამონახსნი

$m = n+k$ ჩავსვათ გამოსახულებაში

$((n+k)^2+n)(n^2+n+k) = 2k^3$

$(n^2+2nk+k^2+n)(n^2+n+k) = 2k^3.$

$n^4+n^3+kn^2+2n^3k+2n^2k+2nk^2+k^2n^2+k^2n+k^3+n^3+n^2+nk = 2k^3.$

~~$-k^3+k^2(n+1)^2+$~~ $-k^3+k^2(n^2+3n)+k(2n^3+3n^2+n)+(n(n+1))^2 = 0$