შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

01.05.2013/ მათ/IV/ 336

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი სვლის შემდეგ არ უნდა [illegible]
[illegible] რიცხვში [illegible] მაქსიმალური
[illegible] არ [illegible]. [illegible] რომ ვთქვათ ამ რიცხვში მაქსიმალური
რიცხვი არის p. [illegible] ნატურალური წყვილისათვის $(a:b)$ $a \le p$ $b < a \le p$
მივიღებთ წყვილებიდან $b+1 \le a \le p$ $a \le p$ $a-1 < p$ ანუ p-ს
ვერ გადააჭარბებს [illegible]. ვთქვათ რიცხვში [illegible] n [illegible]
რიცხვი [illegible] მაქსიმალური [illegible] $p \cdot n$ ამ
p არის ამ რიცხვში მაქსიმალური რიცხვი [illegible]
ყოველ სვლაზე, რიცხვში რიცხვების [illegible]. $(a:b) \to (b+1:a)$
რიცხვში ჯამი [illegible] $a+b$ და [illegible] $a+b+1$ ანუ ჯამი
გაიზრდება. $(a:b) \to (a-1:a)$ [illegible] $a+b$, ხოლო
[illegible] $a-1+a \ge a+b$, რადგან $a > b$ და $\Rightarrow a-1 \ge b$. ანუ
ჯამი ყოველ სვლაზე ან იზრდება ან იგივე რჩება. [illegible]
არ [illegible] ჯამი ყოველი სვლისას. რადგან $p \cdot n$ არის მაქსიმალური
ჯამი ამ [illegible]. ანუ $\Rightarrow$ რომ ~~[illegible]~~ ამ სვლებში [illegible]
([illegible])
[illegible], [illegible] სვლის [illegible] რიცხვში ჯამი
არ [illegible]. ანუ [illegible] სვლის [illegible] $(a:b) \to (a-1:a)$
[illegible] $a-1=b$ რადგან [illegible] ჯამი გაიზრდება. p არის რიცხვში მაქსიმალური
რიცხვი. [illegible] რიცხვში [illegible] რიცხვი 0-ზე მეტი რადგან ყოველ
სვლაზე $(a:b) \to (b+1:a)$ $a > 0$ $b > 0$, $(a:b) \to (a-1:a)$ $a > b > 0$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

01.05.2013/ მათ/IV/ 336

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

თუ $a>1$ მაშ $a-1>0$. ეს რიცხვი [illegible] $(p+1)$-[illegible]
ანუ ყველა რიცხვი $<(p+1)$ და >0. ასევე ყოველ
სვლაზე $(a;b)\to(a-1;a)$ ეს $(p+1)$-[illegible] რიცხვი [illegible]
ხოლო [illegible] $a-1$ [illegible] $(a-1)$ [illegible]
[illegible] ეს არ [illegible] ვერ [illegible] მაშ, [illegible]
[illegible] და ა.შ. მაშ $p.n.l$ [illegible]
მაშ სვლები [illegible] ვერ [illegible].

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

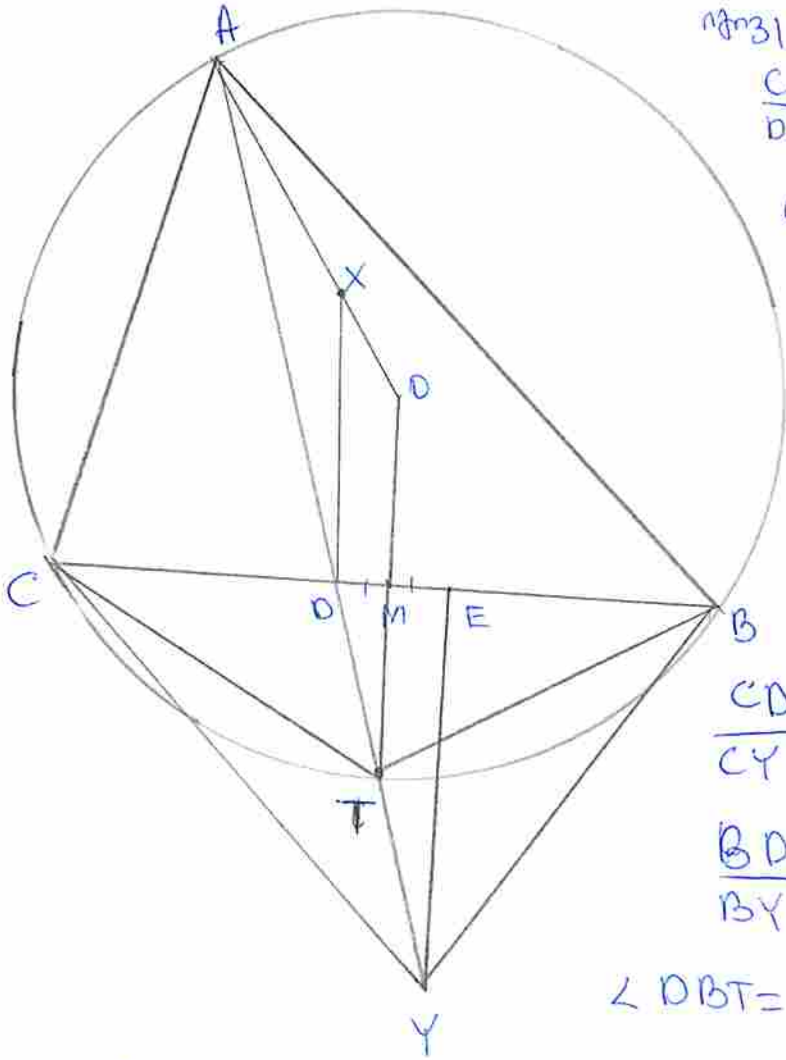
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

01.05.2013/ მათ/IV/ 336

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



$CD = EB$ რადგან

$CD = CM - DM = BM - ME = EB$

ამავე ნაირად $CE = BD \Rightarrow$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AC} \Rightarrow \frac{CE}{EB} = \frac{AB}{AC}$$

$CE = CY \cdot \sin\angle CYE$

$EB = BY \cdot \sin\angle BYE$

D, M, T ერთ წრფეზეა რადგან T არის $\overset{\frown}{BC}$ შუა წერტილი

$DT = TY$ რადგან $DM = ME$ და $MT \parallel YE$

$$\frac{CD}{CY} \cdot \frac{\sin\angle DCT}{\sin\angle TCY} = 1$$

$$\frac{BD}{BY} \cdot \frac{\sin\angle DBT}{\sin\angle TBY} = 1$$

$\angle DBT = \angle DCT$ რადგან $CT = TB$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CY}{BY} \cdot \frac{\sin\angle TCY}{\sin\angle TBY}$$

$$\cancel{\frac{CE}{EB}}\ \frac{EB}{CE} = \frac{BY}{CY} \cdot \frac{\sin\angle CYE}{\sin\angle BYE}$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

01.05.2013/ მათ/IV/ 336

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

ცხადია $m>n$ ხდება ~~$(m-n)^3$~~ და $m=n$ მაშინ $(m-n)^3=0$
$(m^2+n)(n^2+m)>0$ ხდება $n,m>0$ და $n>m$ $(m-n)^3<0$
ამიტომ ხოლოდ [illegible] $(m^2+n)(n^2+m)>0$.

უ.ს.გ.$(m^2+n; m-n)$ = უ.ს.გ.$(m^2+n; m^2+m)$ = უ.ს.გ.$(m^2+m; m-n)$ $\Rightarrow$
 უ.ს.გ.$(m^2+n; (m-n)^3)$ = უ.ს.გ.$(m^2+m; (m-n)^3)$. ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~
~~[illegible] ⇒ m^2+n [illegible] n^2+m [illegible]~~
~~[illegible] ⇒ უ.ს.გ.$(m^2+n; 2(m-n)^3)$ [illegible]~~

~~უ.ს.გ.$(m^2+m; 2(m-n)^3)$ [illegible] = [illegible]~~
~~$\leq 2(m^2+n; 2(m-n)^3)$ [illegible] $(m^2+m; 2(m-n)^3) \leq 2$~~
~~$(m^2+n; 2(m-n)^3$. ხდება $2(m-n)^3=(m^2+n)(n^2+m) \Rightarrow$~~
~~$4(m-n)^3 \vdots (m^2+m)(n^2+n)$~~

რადგან $(m^2+n)(n^2+m) \vdots (m-n)^3 \Rightarrow$
$(m^2+m)(n^2+n) \vdots (m-n)^3$ დავამტკიცოთ
რომ $(m^2+m)(n^2+n) < (m^2+n)(n^2+m)$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

01.05.2013/ მათ/IV/ 336

ამოცანა № 6

გვერდი № 2

$m^2n^2+m^2n+n^2m+mn<m^3+n^3+m^2n^2+mn$

$m^2n+n^2m<m^3+n^3 \quad mn(m+n)<(m+n)(m^2-mn+n^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow mn<m^2-mn+n^2 \quad m+n\neq 0$ და >0

$m^2-2mn+n^2=(m-n)^2>0$ ანუ. სწორია. [illegible] $m\neq n$

$(m^2+m)(n^2+n)<(m^2+n)(n^2+m)=2(m-n)^3$

[illegible] $(m^2+m)(n^2+n) \vdots (m-n)^3 \Rightarrow (m^2+m)(n^2+n)=(m-n)^3$

$m^2n^2+mn+m^2n+n^2m=m^3-n^3+3n^2m-3m^2n \Rightarrow$

$m^2n^2+mn+2m^2n+2n^2m=m^3-n^3+4n^2m-2m^2n$

$(m^2+n)(n^2+m)=2(m-n)^3=2(m^2+m)(n^2+n)=2m^2n^2+2mn+2m^2n+2n^2m \Rightarrow$

$\Rightarrow m^3+n^3=m^2n^2+mn+2m^2n+2n^2m=m^3-n^3+4n^2m-2m^2n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2n^3-4n^2m+2m^2n=0 \Rightarrow n(n^2-2nm+m^2)=0$

$n(n-m)^2=0 \quad n>0 \quad n\neq m \Rightarrow (m^2+m)(n^2+n)\neq(m-n)^3$

ანუ ისეთი m და n არ მოიძებნება რომ დააკმაყოფილოს პირობა. რ. დ. გ.