შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

01.05.2013/ მათ/IV/327

ამოცანა № 4.

გვერდი № 1

[illegible] n [illegible]:

ლემა 1. [illegible] $A(n)$ [illegible] $A(1)=A(2)=\ldots=A(n)=\ldots$

დამტკიცება: [illegible] n [illegible] $A(n)$ [illegible] (a, b) [illegible] $a>b$, [illegible] 2 [illegible]. $\boxed{ა)}$ [illegible] $(b+1, a)$ [illegible] $a \le A(n)$, $b<a \Rightarrow$ $\Rightarrow b+1 \le a \le A(n)$ [illegible] $A(n+1)=A(n)$

$\boxed{ბ)}$ [illegible] $(a-1, a)$ [illegible] $a \le A(n)$, $a-1 < A(n)$ [illegible] $A(n+1)=A(n)$. [illegible] $A(n)=a$ [illegible] $A(n+1)=a$ [illegible] a [illegible] ლემა 1 [illegible] (i, j) [illegible] $A(i)=A(j)$ [illegible] $A(n)$ [illegible].

[illegible] 2 [illegible] a [illegible] b. [illegible] a, b [illegible] $a \le b$ [illegible] $a>b$ [illegible] $a-1, a$ [illegible] $a-1<a$ [illegible] $b+1, a$ [illegible] $a>b \Rightarrow$ $\Rightarrow b+1 \le a$ [illegible] 2 [illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

01.05.2013/ მათ/IV/327

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

[illegible] 2-დან n-მდე ყველა k-სთვის k ცალი [illegible] $n+1$ [illegible] a. [illegible] $A(n+1)=a$, [illegible] a-ს [illegible]

[illegible] a [illegible] t [illegible] a [illegible] t [illegible]

[illegible] t-დან [illegible] n-ის [illegible] a [illegible]

n [illegible] a [illegible] a [illegible] [a [illegible] a, [illegible] a [illegible] $(a,b) \to (a-1,a)$ [illegible] a [illegible] $(a,b) \to (b+1,a)$ [illegible] a [illegible] $b+1=a$ [illegible] $b+1$ [illegible] a [illegible] a_1 [illegible] $A(n+1)$ [illegible] a [illegible]] [illegible] a [illegible]

[illegible] $n+1$ [illegible]

[illegible] a [illegible]

b [illegible]

[illegible] a [illegible] a [illegible]

[illegible] a [illegible]

[illegible] a [illegible]

[illegible] b [illegible] b [illegible] a

[illegible] b [illegible]

b [illegible] a [illegible] a [illegible]

[illegible]

[illegible] a [illegible]

[illegible] a [illegible]

[illegible] a [illegible]

[illegible] a [illegible]

[illegible]

[illegible] $n+1$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

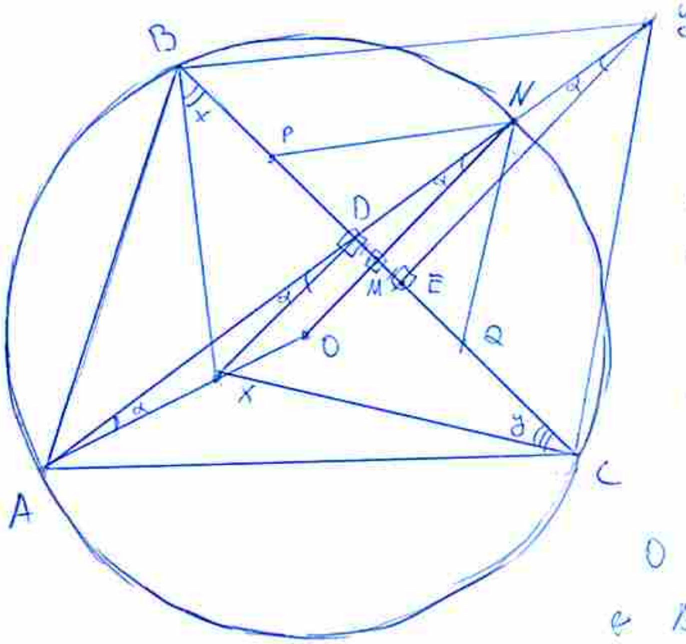
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

01.05.2013/ მათ/IV/ 327

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



ვთქვათ AD-ბისექტრისა არის და $AD \cap \omega \equiv N$ მაშინ $BN = NC$ მაშინ $ON \perp BC$ და თუ $ON \cap BC \equiv M$ მაშინ M არის BC-ს შუაწერტილი მაშინ $\angle NYE = \angle DNO$ რადგან $EY \parallel NM$ და ON სეკანტია ასევე ვიცით O არის ცენტრი ამიტომ $OA = ON$ და $\triangle AON$-ტოლფერდაა. ამიტომ $\angle NAO = \angle ANO = \angle AYE$

ასევე ვიცით $DX \parallel NO$ და AN სეკანტია ამიტომ $\angle ADX = \angle DAX = \angle ANO = \angle AYE \equiv \alpha$ ასევე თუ BD-ს შუაწერტილი P და DC-ს შუაწერტილი Q მაშინ $\angle PNQ = \angle BYC$ რადგან $\triangle BDY$-ში PN არის შუახაზი. და $\triangle DYC$-ში NQ არის შუახაზი (რადგან P არის BD-ს შუაწერტილი; Q არის DC-ს შუაწერტილი ხოლო N არის DY-ის შუაწერტილი რადგან: E არის D-ს სიმეტრიული M-ის მიმართ ამიტომ $DM = ME$ და $MN \perp BC$ და $EY \perp BC$ ამიტომ $MN \parallel YE$ და MN არის შუახაზი $\triangle EDY$ ამიტომ N არის DY-ის შუაწერტილი) შესაბამისად $PN \parallel BY$ და $QN \parallel CY$ ანუ $\angle PNQ = \angle BYC$ რადგან თუ ვაჩვენებთ რომ $\angle BXC + \angle PNQ = 180°$ მაშინ $\angle BXC + \angle BYC = 180°$ და $BXCY$-ჩახაზული იქნება.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

01.05.2013/ მათ/IV/ 327

ამოცანა № 5

გვერდი № 2

[illegible] [illegible] [illegible] ვაჩვენოთ რომ თუ $\angle CBX \equiv x$ და $\angle BCX \equiv y$ მაშინ $\angle PNQ = x+y$. ამის [illegible] ვაჩვენეთ რომ $\angle PNM = x$ და $\angle QNM = y$ მაშინ [illegible] [illegible] [illegible] $\angle PNQ$ იქნება $x+y = 180^\circ - \angle BXC$ [illegible] [illegible] $\angle PNQ = \angle BYC$ [illegible] $\angle BYC + \angle BXC$ იქნება 180° და $BXCY$ იქნება [illegible]. ამის $\angle PNM$-ს და $\angle XBD$-ს [illegible] [illegible] [illegible] ვაჩვენეთ რომ $\Delta BXD \sim \Delta PNM$ და $\angle QNM$-ს და $\angle DCX$-ს [illegible] [illegible] [illegible] ვაჩვენეთ რომ $\Delta QNM \sim \Delta CDX$ [illegible] [illegible] $\Delta BXD \sim \Delta PNM$ და $\Delta QNM \sim \Delta CDX$ [illegible] რომ მაშინ [illegible] [illegible] იქნება.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16	01.05.2013/ მათ/IV/ 327

ამოცანა № 6 გვერდი № 1

~~დავუშვათ (m-n) ⋮ p^α ⋮ p^{α+1}, მაშინ (m-n) ⋮ p^α ⋮ p^{α+1} მაშინ~~

~~$(m^2+n)(n^2+m) \vdots p^{3\alpha}$~~

დავუშვათ $(m-n) \vdots p$ (სადაც $m>n$ რადგან $m \le n$-თვის, შაიმ ... (სადაც p ... $(m^2+n)(n^2+m) \ne 2(m-n)^3$) მაშინ $(m^2+n)(n^2+m) \vdots p$ რაც ნიშნავს

$m^2+n \equiv m^2+n-m(m-n) \equiv m^2+n-m^2+mn = n(m+1) \pmod p$ და

$n^2+m \equiv n^2+m-n(n-m) \equiv n^2+m-n^2+mn = m(n+1) \pmod p$ ესე

$mn(m+1)(n+1) \vdots p$ მაშინ თუ $m \vdots p \Leftrightarrow n \vdots p$ რადგან $(m-n) \vdots p$ და თუ

$(m+1) \vdots p \Leftrightarrow (n+1) \vdots p$ რადგან $[(n+1)-(m+1)] \vdots p$ ესე თუ $(m-n) \vdots p \Rightarrow$ ან $(m,n) \vdots p$ ან

$(m+1)(n+1) \vdots p$ ნიშნავს თუ $(m,n) \vdots p \Rightarrow m-n \vdots p$ და თუ $(m+1)(n+1) \vdots p \Rightarrow m-n \vdots p$

ესე მივიღეთ რომ $(n,m)\cdot(n+1,m+1) \vdots (m-n)$ და რადგან $((m+1),(n+1))$ და (m,n)-ს ურთ. გამ. არის 1 ამიტომ $(m-n) \vdots (m,n)\cdot(m+1,n+1)$ ესე მივიღეთ რომ $(m-n)=(m,n)\cdot(m+1,n+1)$ ნიშნავს სადაც $m \ge (n+1)^2$ რადგან თუ $m<(n+1)^2$ მაშინ $(m^2+n)(n^2+m) > 2(m-n)^3$ ესე $m \ge (n+1)^2$. ასევე $(m,n) \le n$ და $((m+1),(n+1)) \le n+1$ ამიტომ $(m-n) \le n(n+1)$ ესე

$m-n \le n^2+n \Rightarrow m \le n^2+2n$ ესე მივიღეთ რომ

$m \le n^2+2n$ და $m \ge (n+1)^2 = n^2+2n+1$ ესე $n^2+2n \ge m \ge n^2+2n+1$ ესე

$n^2+2n > n^2+2n+1$ რაც არ არის ~~...~~ სწორი ამიტომ ასეთი

m,n დადებითი არ არსებობს

რ.დ.გ.