

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი  
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო  
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

01.05.2013/ მათ/IV/327

ამოცანა № 4.

გვერდი № 1

დავუბნაო რეკურსული ფუნქცია  $n$  სრ. რეკურსია დავამუშაოთ:

თეორემა 1. მოცემული რეკურსიული ფუნქციის მნიშვნელობა  $A(n)$  განისაზღვრება რეკურსიული ფორმულით  $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$  სავსე ანუ განვიხილოთ იგი მოცემული რეკურსიული ფორმულით  $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$ . (შენიშვნა:  $A(1) = A(2) = \dots = A(n) = \dots$ )

დავამტკიცებთ: დავუბნაო. მოცემული  $n$  სრ. რეკურსია  $A(n)$ .

შენიშვნა: მოცემული სავსე ანუ  $(a, b)$  შორის სრ.  $a > b$ , ფუნქცია

$\exists$  ვარაუდით,  $\exists$  ანუ  $(b+1, a)$  შორის  $a \leq A(n), b < a \Rightarrow$

$\Rightarrow b+1 \leq a \leq A(n)$  ხდება სავსე რეკურსია ანუ  $A(n+1) = A(n)$ .

$\exists$  ანუ  $(a-1, a)$  შორის  $a \leq A(n), a-1 < A(n)$  ხდება დაბნეული რეკურსია ანუ  $A(n+1) = A(n)$ .

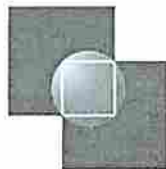
შენიშვნა:  $A(n) = a$  შორის  $A(n+1) = a$  ანუ  $a$  რეკურსია სავსე რეკურსია ანუ  $A(n+1) = A(n)$ .

დავამტკიცებთ:  $(i, j)$  ფუნქციის  $A(i) = A(j)$  სრ.  $A(n)$  შორის რეკურსია  $A(n)$  შორის რეკურსია.

მოცემული რეკურსია  $n$  სრ. რეკურსია  $A(n)$  შორის რეკურსია  $A(n)$  შორის რეკურსია  $A(n)$ .

ანუ  $(a, b)$  შორის  $a \leq b$  შორის სრ. ვარაუდით  $\exists$  ანუ  $a > b$  შორის  $a-1, a$  შორის  $a-1 < a$  ანუ

რეკურსია სავსე რეკურსია ანუ  $(b+1, a)$  შორის  $a > b \Rightarrow \Rightarrow b+1 \leq a$  ანუ  $(b+1, a)$  შორის ვარაუდით ანუ  $\exists$  ანუ რეკურსია  $A(n)$  შორის რეკურსია  $A(n)$ .



### შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

01.05.2013/ მათ/IV/327

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

მესამე მარჯვენა 2-ედი  $n$ -მდე ყველა  $k \leq n$ -ს  $k$ -ად მისთვის მოცემული  
 მათა წყარო, გზით  $n+1$  სარ მოცემულია; მარჯვენა მ მოცემული  
 გზით ყოველ  $n$ -ის  $a$ , თუ  $A(n+1) = a$ . მისი თუ  $a-1$   
 მოცემულია  $k$ -ის მათა, სარ მოცემული, თუ თ იმ მოცემული  
 მოცემული სარ მოცემულია  $k$ -ის  $a$  მოცემული, თუ სარ მოცემული  
 მოცემული  $t$  მოცემული თუ მოცემული მოცემული მოცემული  $a$  მოცემული  
 ბარ  $t$  მოცემული მოცემული  $k$  მოცემული მოცემული თუ მოცემული-  
 მოცემული  $t$ -ის მოცემულია  $k$ -ის მოცემულია  $n$ -ის მოცემული  
 მოცემულია მოცემული  $a$  მოცემული, მოცემული  $a$  მოცემული) სარ  
 $n$ -ის მოცემულია მოცემულია სარ მოცემულია მოცემულია  $n$ -ის მოცემული-  
 მოცემული თუ თუ მოცემული მოცემული  $a$  მოცემული  $a$  მოცემული  $n$  მოცემული-  
 მოცემული-  
 მოცემულია მოცემულია მოცემული  $a$  მოცემული  $n$ -ის მოცემულია მოცემული-  
 მოცემული  $n$  მოცემულია  $a$  მოცემულია მოცემულია მოცემული  $a$ ,  
 თუ მოცემულია  $a$  მოცემულია მოცემული  $(a, b) \rightarrow (a-1, a)$  -  
 $a$  მოცემული  $a$  თუ მოცემულია მოცემული  $(a, b) \rightarrow (b+1, a)$  -  
 მოცემული  $a$  თუ მოცემულია თუ  $b+1 = a$  მოცემული  $b+1$   $n$  მოცემულია მოცემული  
 მოცემულია მოცემულია მოცემული მოცემული  $a$  მოცემული  $a-1$  მოცემული მოცემულია  
 მოცემული, ბარ თუ მოცემული  $A(n+1)$ -ის თუ თუ მოცემული მოცემული-  
 მოცემული მოცემული  $a$  თუ  $a$  მოცემულია მოცემული) თუ მოცემულია მოცემული  
 მოცემული მოცემულია, მოცემულია მოცემულია მოცემული  $a$  მოცემულია  
 მოცემული  $n+1$  სარ მოცემულია  $n$ -ის მოცემულია მოცემულია მოცემულია



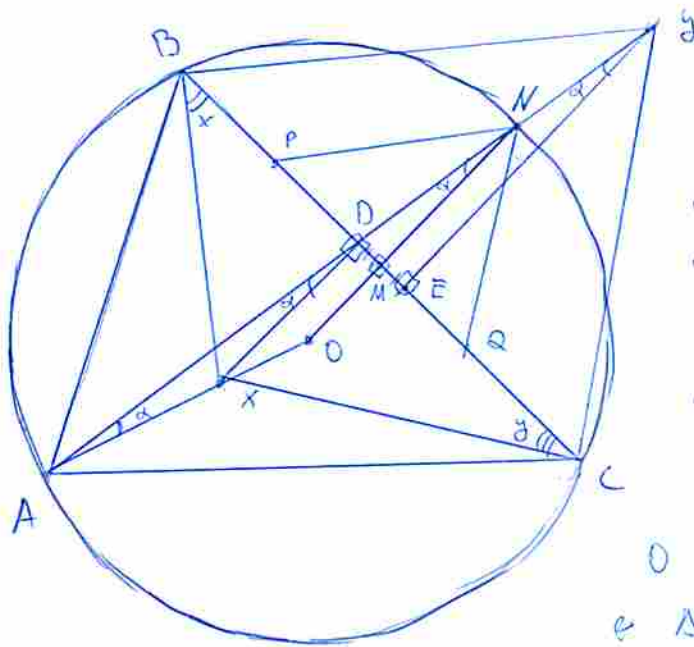


მაგიდა № 16

01.05.2013/ მათ/IV/ 327

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



შევახსენებთ  $AD \perp BC$  და  $BN \perp AC$   
 $\Rightarrow AD \cap BN = P$  გვაქვს  $BN = NC$   
 გვაქვს  $ON \perp BC$  და  $ON \cap BC = M$   
 გვაქვს  $M$  არის  $BC$ -ის შუამდგომლობა  
 გვაქვს  $\angle NYE = \angle ONO$  აქედან  $EN \parallel OM$  და  
 $DN$  სწორი არის  $OM$ -ის პარალელი  
 $O$  არის  $AD$ -ის შუამდგომლობა აქედან  $OA = ON$   
 და  $\triangle AON$  - ტოლიკუთხედი. აქედან  $\angle NAO = \angle AVO = \angle AYE$

სადაც  $OX \parallel NO$  და  $AN$  სწორი არის  $OX$ -ის პარალელი  
 $\angle AOX = \angle AVO = \angle AYE = \alpha$  აქედან  $BD$ -ის შუამდგომლობა  $P$  და  $DC$ -ის  
 შუამდგომლობა  $Q$  გვაქვს  $\angle PNQ = \angle BYC$  აქედან  $\triangle BDC$ -ში  $PN$  არის  
 შუამდგომლობა და  $\triangle DYC$ -ში  $NQ$  არის შუამდგომლობა (თუ  $P$  არის  $BD$ -ის შუამდგომლობა,  
 $Q$  არის  $DC$ -ის შუამდგომლობა ხოლო  $N$  არის  $DY$ -ის შუამდგომლობა აქედან  
 $E$  არის  $D$ -ის სიმეტრიული წერტილი  $M$ -ის მიმართ. აქედან  $DM = ME$  და  $MN \perp BC$   
 $\Rightarrow EN \perp BC$  აქედან  $MN \parallel EN$  ანუ  $MN$  არის შუამდგომლობა  $\triangle EDC$ -ში  
 $N$  არის  $DY$ -ის შუამდგომლობა) აქედან  $\angle PNQ = \angle BYC$  აქედან  
 $PN \parallel BY$  და  $EN \parallel CY$  ანუ  $EN$  არის  $PN$ -ის პარალელი და  $\angle BXC + \angle PNQ = 180^\circ$   
 გვაქვს  $\angle BXC + \angle BYC = 180^\circ$  და  $BXC$  - სწორი კუთხე.



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი  
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო  
ოლიმპიადისათვის

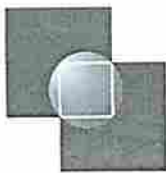
მაგიდა № 16

01.05.2013/ მათ/IV/ 327

ამოცანა № 5

გვერდი № 2

იმ სწავლებელს უნდა ვიჩვენოთ, რომ  $\angle CBX = x$  და  $\angle BCX = y$  არის  
 $\angle PNA = x + y$ . მას არ ვიჩვენებთ, რომ  $\angle PNM = x$  და  $\angle QNM = y$   
 არის მათი კომპლემენტი, რადგან  $\angle PNA$  იქნება  $x + y = 480^\circ - \angle BXC$  მათა  
 რადგან  $\angle PNA = \angle BXC$  მათა  $\angle BXC + \angle BXC$  იქნება  $180^\circ$  და  $\angle BXC$  იქნება  
 სწავლებელს. მას  $\angle PNM$  და  $\angle XBD$  უნდა ვიჩვენოთ სწავლებელს უნდა  
 ვიჩვენოთ, რომ  $\triangle BXD \sim \triangle PNM$  და  $\angle QNM$  და  $\angle DCX$  უნდა ვიჩვენოთ  
 სწავლებელს ვიჩვენოთ, რომ  $\triangle QNM \sim \triangle DCX$  არის რადგან  $\angle QNM$  და  
 $\triangle BXD \sim \triangle PNM$  და  $\triangle QNM \sim \triangle DCX$  არის რადგან  $\angle QNM$  და  
 მათ მათა კომპლემენტი იქნება.



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი  
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო  
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

01.05.2013/ მათ/IV/ 327

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

~~დავუშვათ  $(m, n) \equiv p \pmod{p}$ ,  $(m, n) \equiv p^{2k+1} \pmod{p}$~~   
 ~~$(m^2+n)(h^2+m) \equiv p^2 \pmod{p}$~~   
 დავუშვათ  $(m-n) \equiv p$  (ალბათ  $m > n$  ან  $m \leq n$  - ასეა, ვინაიდან  $m$  და  $n$  საკლებია  $\mathbb{Z}$ -ში).  
 ხაზს გასვამთ  $(m^2+n)(h^2+m) \not\equiv p^2 \pmod{p^3}$  და  $(m^2+n)(h^2+m) \equiv p^2 \pmod{p}$  ანუ  
 $m^2+n \equiv m^2+n - m(m-n) \equiv m^2+n - m^2 + mn = n(h+1) \pmod{p}$  და  
 $h^2+m \equiv h^2+m - n(h-n) \equiv h^2+m - n^2 + nh = m(h+1) \pmod{p}$  ანუ  
 $mn(m+1)(h+1) \equiv p$  და ან  $m \equiv p \pmod{p}$  ან  $n \equiv p \pmod{p}$  ან  $m \equiv h \pmod{p}$  ან  $n \equiv h \pmod{p}$   
 $(m+1) \equiv p \pmod{p}$  ან  $(h+1) \equiv p \pmod{p}$  ან  $(h+1) - (m+1) \equiv p$  ან  $(m-n) \equiv p$  ან  
 $(m+1)(h+1) \equiv p$  ან  $(m, h) \equiv p \pmod{p} \Rightarrow m-h \equiv p$  ან  $(m+1)(h+1) \equiv p \Rightarrow m-h \equiv p$   
 ან ადვილია იმის დადგენა, რომ  $(m, n) \cdot (m+1, n+1) \equiv (m-n) \pmod{p}$  ან  $(m+1)(h+1) \equiv p$   
 $(m, n) \equiv 1 \pmod{p}$  ან  $(m+1, n+1) \equiv 1 \pmod{p}$  ან  $(m-n) \equiv (m, n) - (m+1, n+1) \pmod{p}$  ან ადვილია  
 იმის დადგენა, რომ  $(m-n) = (m, n) \cdot (m+1, n+1)$  ანუ ალბათ  $m \geq (h+1)^2$  ან  $m < (h+1)^2$   
 ან  $(m^2+n)(h^2+m) > p^2(m-n)^3$  ან  $m \geq (h+1)^2$ , რადგან  
 $(m, n) \leq h$  და  $(m+1)(h+1) \leq h+1$  ან  $(m-n) \leq h(h+1)$  ან  
 $m \leq h \leq h^2+n \Rightarrow m \leq h^2+2h$  ან ადვილია იმის დადგენა, რომ  
 $m \leq h^2+2h$  ან  $m \geq (h+1)^2 = h^2+2h+1$  ან  $h^2+2h \geq m \geq h^2+2h+1$  ან  
 $h^2+2h > h^2+2h+1$  ან ანუ ადვილია იმის დადგენა, რომ  
 $m, n$  არ არიან  $\mathbb{Z}$ -ში. რადგან