შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 9

01.05.2013/ მათ/IV/ 306

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

ვთქვათ ჩამოწერილია რიცხვები $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ და როცა მოვძებნით ისეთ ორს a_i და a_j $(a_j < a_i)$, მაშინ a_j-ს ადგილზე უნდა დავწეროთ a_i და a_i-ს მაგივრად ან $a_i - 1$, ანდაც $a_j + 1$; აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველ ასეთ ჩაწერისას ორ ნებისმიერ ~~...~~ მარჯვენა რიცხვს (ჩვენს შემთხვევაში a_j-ს) ვზრდით, ხოლო მის ადგილზე a_i-ს ვწერთ და მარცხენა რიცხვს (ჩვენს შემთხვევაში a_i-ს) ან ვამცირებთ, ანდაც იგივეს ვტოვებთ, რადგან $a_i > a_j$ ~~...~~ ეს ნიშნავს რომ $a_j \le a_i - 1$ და ~~...~~ $a_j + 1 \le a_i$, ხოლო მეორე შემთხვევაში $a_i - 1$ ~~...~~ ან არც უნდა ნაკლებია a_i; ე.ი. ეს გამოდის, რომ ეს რიცხვები ნელ-ნელა ლაგდება ზრდადობის მიხედვით, რადგან დიდი რიცხვები გადადიან მარცხნიდან მარჯვნივ, და მარჯვნიდან მარცხნივ რიცხვები მცირდება; ე.ი. როცა ~~...~~ მომენტში, ეს რიცხვები დალაგდება ზრდადობის მიხედვით, ის შემდეგს ჩვენ სვლას ვეღარ გავაკეთებთ, რადგან ~~...~~ ნებისმიერ ორ არჩეულ რიცხვს შორის, მარცხენა რიცხვი ~~...~~ ნაკლები იქნება მარჯვენაზე. ანუ სვლა და ნაბიჯს ვერ შევასრულებთ.
რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

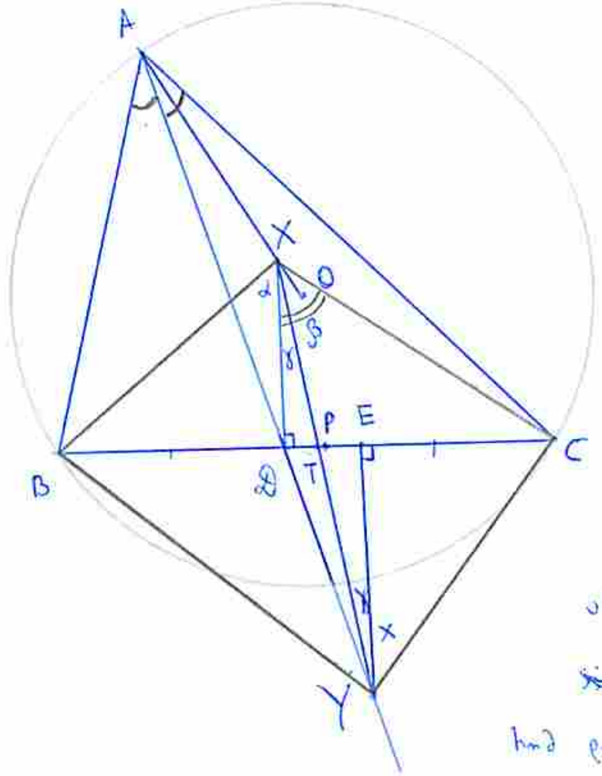
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 9

01.05.2013/ მათ/IV/ 306

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



T არის BC-ს და XY-ის გადაკვეთის წერტილი.
ხოლო P არის BC-ს შუაწერტილი. რადგან
E სიმეტრიულია D-ს, P-ს მიმართ, ე.ი. $BD=EC$
რადგან $DP=PE$ და $BP=PC$; $\angle BXD\equiv\alpha$
$\angle DXC\equiv\beta$; ვიცით, რომ $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{BD}{DC}$
რადგან AD ბისექტრისაა, $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$;
$\angle EYC\equiv x$ $\angle BYE\equiv y$
ასე ვიღებთ $\frac{BY}{YC}\cdot\frac{\sin y}{\sin x}=\frac{BE}{EC}$;
რადგან ~~AB~~ $BD=CE$, ე.ი. $BX\sin\alpha=CY\cdot\sin x$
ანუ $\frac{BX}{CY}=\frac{\sin x}{\sin\alpha}$. ასევე რადგან $BE=DC$
~~ანუ~~ $BY\cdot\sin y=XC\cdot\sin\beta$, ანუ $\frac{XC}{BY}=\frac{\sin y}{\sin\beta}$
რომ დავამტკიცოთ BYCX არის [illegible], უნდა ვაჩვენოთ, რომ
$BT\cdot TC=XT\cdot YT$;

რადგან $XD\parallel YE \Rightarrow \angle DXT=\angle TYE\equiv\gamma$; ანუ ვიღებთ $\cancel{\frac{TX}{\cos\gamma}\cdot DX=BX}$
$TX\cdot\cos\gamma=BX\cdot\cos\alpha=$ ~~და~~ $CX\cdot\cos\beta$ და $CY\cdot\cos x=TY\cos\gamma$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$TX=\frac{BX\cos\alpha}{\cos\gamma}$ $\qquad TY=\frac{CY\cdot\cos x}{\cos\gamma}$

ე.ი. $TX\cdot TY=\frac{BX\cdot CY\cdot\cos\alpha\cdot\cos x}{\cos\gamma^2}=\frac{BX\cdot\cos\alpha\cdot CY\cdot\cos x}{\cos\gamma^2}=\frac{XD\cdot YE}{\cos\gamma^2}$

ახლა დავამტკიცოთ $BT\cdot CT=(BD+DT)\cdot(EC+ET)=\cancel{(BD+XT\cdot\sin\gamma)\cdot(BD+TY}$
$=(BD+XD\cdot ctg\gamma)(BD+YE\cdot ctg\gamma)=BD^2+BD\cdot YE\cdot ctg\gamma+BD\cdot XD\cdot ctg\gamma+XD\cdot YE\cdot ctg\gamma^2$

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 9

01.05.2013/ მათ/IV/ 306

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3$ $m>n$ [illegible]

$m^2n^2+m^3+n^3+mn = 2(m^3-3m^2n+3mn^2-n^3)$

$m^3+n^3+m^2n^2+mn = 2m^3-6m^2n+6mn^2-2n^3$

$3n^3+m^2n^2+mn+6m^2n+6mn^2-m^3=0$

$3n^3-m^3+mn(mn+6m-6n+1)=0$

$2n^3+(n-m)(n^2+mn+m^2)+mn(mn+6(m-n)+1)=0$

[illegible] $mn(mn+6(m-n)+1)+2n^2>|(n-m)(n^2+mn+m^2)|$

$m^2n^2+6m^2n-6mn^2+mn+2n^2> m^3-n^3$

$(m^3-n^3-3m^2n+3mn^2)$