შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

01.05.2013/ მათ/IV/ 301

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

~~a → b ნიშნავს რომ a აძლევს b-ს მონეტას ...~~

$a \to b$ ნიშნავს : a აძლევს b-ს მონეტას.
განვიხილოთ ყველაზე დიდი რიცხვი ამ ნატურალურ რიცხვებში. ავღნიშნოთ, რომ
იგი არ იცვლება სულ ყველგან ყოველთვის. რადგან $b+1 \leq a$ და a არ იცვლე-
ბა. ახლა განვიხილოთ რიცხვი N, რომელიც უდრის ყველა რიცხვის სხვაობის მოდულე-
ბის ჯამს ამ მაქს რიცხვთან. ანუ თუ max რიცხვია T მაშინ $N=|T-A_1|+\ldots$
$+\ldots+|T-A_k|$. სულ k ცალი რიცხვი გვაქვს და ესენი არიან $A_1,\ldots,A_k$. ყოველ
სვლაზე ეს N რიცხვი ან მცირდება ან არ იცვლება, რადგან თუ ხდება
$(b+1;a)$ სვლები $|T-a|+|T-b|$ ნაცვლად გვექნება $|T-a|+|T-b-1|$ რაც ტო-
ლი მეტია. ხოლო თუ $(a-1;a)$ სვლები ხდება, მაშინ გვაქვს 2 ვარიანტი

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3	01.05.2013/ მათ/IV/ 301
ამოცანა № 4	გვერდი № 2

თუ $b=a-1$ მაშინ N არ იცვლება $|T-a+1|+|T-a|=|T-b|+|T-a|$, ხოლო თუ $b<a-1$ მაშინ N მცირდება $|T-a+1|+|T-a|<|T-b|+|T-a|$.
დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ თამაში გრძელდება უსასრულოდ მაშინ რაღაც მომენტში N-ის შემცირება შეწყდება, რადგან N 0-ს ქვემოთ ვერ ჩავა და ცვლის უსასრულოდ ვერ შემცირდება, მაშინ ამის შემდეგ ზემოთ ნაჩვენების თანახმად მხოლოდ $(a-1;a)$ ოპერაცია სრულდება, თანაც $b=a-1$. ანუ $(a;b)$ ვიღებთ $(b;a)$. ანუ ხდება მხოლოდ მეზობლების ოპერაცია. რაც ლემის თანახმად უსასრულოდ ვერ გაგრძელდება.

შემოვიღოთ რიცხვი M, რომელიც ტოლია იმ რიცხვთა წყვილების რაოდენობის, რომლისთვისაც $\begin{cases} a>b \\ a\to b \end{cases}$. ანუ რომელზეც ~~შეგვიძლია~~ შეიძლება სვლა გავაკეთოთ.
ახლა თუ ვაჩვენებთ, რომ ყოველ სვლაზე M მცირდება მაშინ ის უსასრულოდ ვერ შემცირდება და რაღაც მომენტში 0 გახდება. ანუ სვლას ვეღარ გავაკეთებთ და ვიღებთ წინააღმდეგობას.

x, y და z არის რიცხვთა რაოდენობები შესაბამის ადგილას მიმდევრობაში.

$$\underbrace{\ldots\ldots}_{x}\, a\, \underbrace{\ldots\ldots}_{y}\, b\, \underbrace{\ldots\ldots}_{z}$$

$\underline{a>b}$ $\quad$ $\underline{b=a-1}$

ანუ ადგილს ვცვლით a და b-ს.
x და z a-ს თან მიმართებაში არაფერი არ იცვლება, არც მნიშვნელობები არც რიგითობა. ასევე x და z-ის b-ს მიმართებაში. ანუ არ იცვლება.

$$a \underbrace{\ldots\ldots}_{y} b \longrightarrow b \underbrace{\ldots\ldots}_{y} a.$$

ახლა რაც b a-ს წინ დავწერეთ 1-ით შემცირდა M. რადგან M-ს გამოაკლდა (a,b) წყვილი, რომელზეც სვლის გაკეთება შეიძლებოდა, ხოლო (b,a)-ზე ვერ ვაკეთებთ, რადგან $b<a$.
ახლა, შევხედოთ ის წყვილები რომლებიც a-ს ან b-ს შეიცავენ, რადგან სხვებს არც ადგილს ვცვლით და არც მნიშვნელობას.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

01.05.2013/ მათ/IV/ 301

ამოცანა № 4

გვერდი № 3

N_1 იყოს იმათი y_i-ების რაოდენობა, რომ $y_i < a$

N_2 : $y_i > b$.

N_1' : $y_i < b$

N_2' : $y_i > a$.

ახლა ამ სვლის შემდეგ M-ის მნიშვნელობა გახდება $M-1-N_1-N_2+N_1'+N_2'$.

ცხადია $N_1 \geq N_1'$ (რადგან $a > b$) და $N_2 \geq N_2'$ (რადგან $a > b$).

მაშინ $M > M-1-(N_1-N_1')-(N_2-N_2')$. ანუ დავამტკიცეთ, რომ ყოველ სვლაზე M მცირდება. ხოლო რადგან [illegible] სვლის [illegible] იქნება [illegible]. ანუ მივიღეთ წინააღმდეგობა. ანუ დავამტკიცეთ, რომ თამაში [illegible] [illegible]-[illegible].

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

01.05.2013/ მათ/IV/ 301

ამოცანა № 5

გვერდი № 1

$AX = DX \Rightarrow KX$ არის სიმაღლე და მედიანა $\Rightarrow$

$\Rightarrow AK = DK = \dfrac{AD}{2}$.

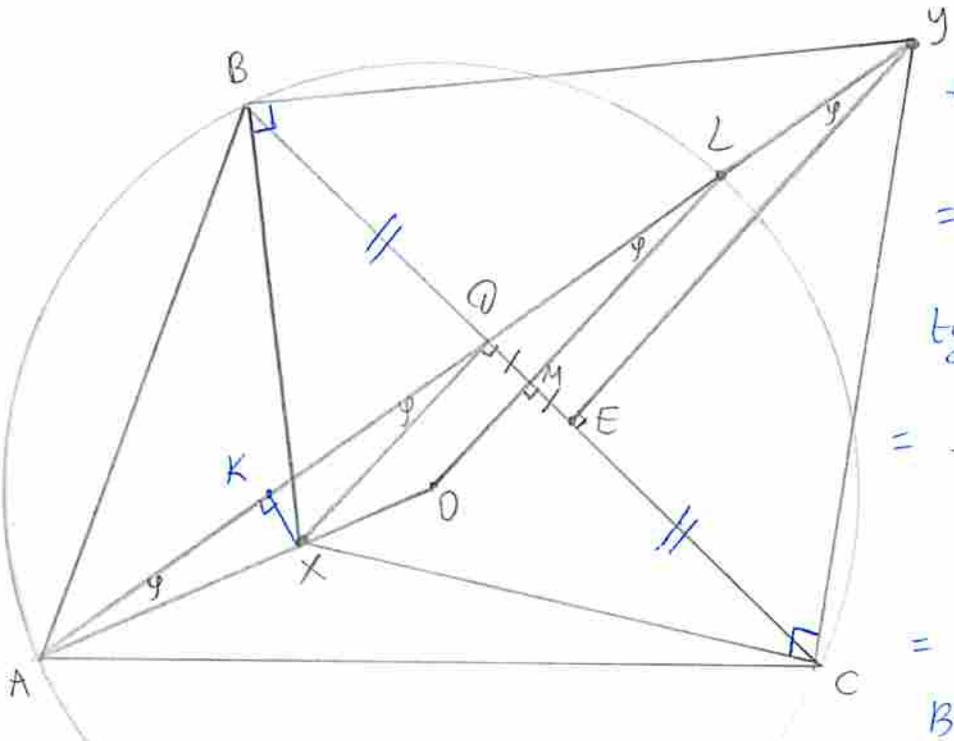
$\angle DLM = \angle DY\boxed{M} = \varphi$

$\angle ADX = \varphi$

$AO = LO \Rightarrow \angle DAX = \varphi$

$DM = ME$

$OL = LY$



$XD \parallel OL \parallel EY$

$\operatorname{tg}\angle YCE = \dfrac{EY}{EC} = \dfrac{2 \cdot LM}{BD} = \dfrac{2 \cdot DL\cos\varphi}{BD}$.

$\operatorname{tg}\angle DXC = \dfrac{CD}{XD} = \dfrac{CD}{\frac{KD}{\cos\varphi}} = \dfrac{CD}{\frac{AD}{2\cos\varphi}} = \dfrac{2CD\cos\varphi}{AD}$

$BD \cdot CD = DL \cdot AD \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{DL}{BD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\angle YCE = \operatorname{tg}\angle DXC \Rightarrow \angle YCE = \angle DXC$

$\angle DXC + \angle DCX = 90^\circ \Rightarrow \angle YCD + \angle XCD = 90^\circ \Rightarrow \underline{\angle YCX = 90^\circ}$

$\underline{BY^2 - CY^2} = BE^2 + YE^2 - YE^2 - CE^2 = BE^2 - CE^2 = CD^2 - BD^2 = \underline{CX^2 - BX^2}$

$BY^2 + BX^2 = CY^2 + CX^2 = YX^2$ (რადგან $\angle YCX = 90^\circ$)

$BY^2 + BX^2 = XY^2 \Rightarrow \angle XBY = 90^\circ$ $\quad \begin{cases} \angle XBY = 90^\circ \\ \angle XCY = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \square BXCY$ ჩახაზვადია რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

01.05.2013/ მათ/IV/ 301

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$(m^2+n)(n^2+m)=2(m-n)^3$ $\quad \underline{m>n}$

$(m^2+n)(n^2+m) \vdots 2 \Rightarrow \begin{cases} m \vdots 2 \\ n \vdots 2 \end{cases}$ ან $\begin{cases} m \not\vdots 2 \\ n \not\vdots 2 \end{cases}$

1) $\begin{cases} m \vdots 2 \\ n \vdots 2 \end{cases}$

$\begin{cases} m=2^x p & p\equiv 1 \pmod 2 \\ n=2^y q & q\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$

ლემა.

თუ $a \vdots 2^r$ და $b \vdots 2^s$ სადაც $r,s\geq 1$ და $r\neq s$. მაშინ $a \vdots 2^{\min(r,s)}$ (1)

ა) $x\neq 2y \quad y\neq 2x \quad x\neq y$. სადაც განსხვავებულია (1) ⇒.

[illegible]

$\Rightarrow \min(2x,y)+\min(2y,x)=1+3\min(x,y)$. ეს x და y ერთმანეთის სიმეტრიულია. ზოგადობის შეუზღუდავად $x\leq y$.

1) $2x<y$.

$2x+x=1+3x$ რაც შეუძლებელია.

2) $2x>y$.

$y+x=1+3x$

$y=1+2x$ რაც ეწინააღმდეგება $(2x>y)$.

ანუ დარჩა შემთხვევები $\begin{cases} x=y & (A) \\ y=2x & (B) \\ x=2y & (C) \end{cases}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

01.05.2013/ მათ/IV/ 301

ამოცანა № 6

გვერდი № 2

2) $\begin{cases} m \,\bar{\vdots}\, 2 \\ n \,\bar{\vdots}\, 2 \end{cases}$

ავიღოთ ისეთი მაქს. x რომ $m-n \,\vdots\, 2^x$.

$\begin{cases} m = p \cdot 2^x + r \\ n = q \cdot 2^x + r \end{cases}$

$(m^2+n)(n^2+m) \equiv (r^2+r)^2 \pmod{2^x}$

$(m^2+n)(n^2+m) \,\vdots\, 2^{3x+1} \Rightarrow (m^2+n)(n^2+m) \equiv 0 \pmod{2^x} \Rightarrow$

$\Rightarrow r(r+1) \equiv 0 \pmod{2^x}$

$0 < r < 2^x \;\big|\Rightarrow r+1 \equiv 0 \pmod{2^x}. \Rightarrow r \equiv -1 \pmod{2^x}$

$\begin{cases} m = p \cdot 2^x - 1 \\ n = q \cdot 2^x - 1 \end{cases}$

A) $x = y$.

$m = 2^x p \quad n = 2^x q$. p, q კენტები.

$(2^{2x}p^2 + 2^x q)(2^{2x}q^2 + 2^x p) = 2 \cdot 2^{3x}(p-q)^3$

$\underbrace{(2^x p^2 + q)}_{\text{კენტ}}\underbrace{(2^x q^2 + p)}_{\text{კენტ}} = \underbrace{2^{x+1}}_{\text{ლუწი}}(p-q)^3$ – წინააღმდეგობა გვაქვს. ანუ A გამორიცხ.

$(m^2+n)(n^2+m) \geq 2m\sqrt{n} \cdot 2n\sqrt{m} = 4mn\sqrt{mn}$

$2(m-n)^3 \geq 4mn\sqrt{mn}$

$(m-n)^3 \geq 2mn\sqrt{mn} = 2(\sqrt{mn})^3$

$m-n \geq \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{mn}$

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

01.05.2013/ მათ/IV/ 301

ამოცანა № 6

$$\begin{cases} m+n \geq 2\sqrt{mn} \\ m-n \geq \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{mn} \end{cases}$$

$$2m \geq \sqrt{mn}\left(2+\sqrt[3]{2}\right)$$

$$\sqrt{m}\cdot 2 \geq \sqrt{n}\left(2+\sqrt[3]{2}\right)$$

$$4m \geq n\left(2+\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}\right).$$

$$m \geq \frac{n}{4}\left(2+\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}\right) = \frac{n}{2}+\frac{n\sqrt[3]{4}}{4}+n\sqrt[3]{2}.$$

$$m \geq \frac{n}{2}+\frac{n}{\sqrt[3]{16}}+n\sqrt[3]{2}.$$

$$\begin{cases} m = pk \\ n = qk \end{cases} \qquad \begin{matrix} k=(m,n) \\ (p,q)=1. \end{matrix}$$

$$(p^2k^2+qk)(q^2k^2+pk) = 2k^3(p-q)^3$$

$$(p^2k+q)(q^2k+p) = 2k(p-q)^3$$

$k = ab$ მოიძებნება k-ს ასეთი სხვა წარმოდგენა.

$$\begin{cases} q \,\vdots\, a \\ p \,\vdots\, b. \end{cases}$$

$$m^2n^2+mn+m^3+n^3 = 2m^3-6m^2n+6mn^2-2n^3$$

$$3n^3-m^3+m^2n^2+mn+6m^2n-6mn^2=0$$