შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

30.04.2013/ მათ/III/ 298

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x,y,z\in N$ $x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)$ განვიხილოთ 2 შემთხვევა

1) x ლუწია $x=2x_1$ $x_1\in N$ მაშინ $8x_1^3(y^3+z^3)=2012(2x_1yz+2)$

$8x_1^3(y^3+z^3)=2^3\cdot 503(x_1yz+1)$ $x_1^3(y^3+z^3)=503(x_1yz+1)$

მარჯვენა მხარე $\vdots x_1^3$ ხოლო ~~$(x_1yz+1;x_1)=1$~~ $(x_1yz+1;x_1)=1$

ამიტომ ან $x_1=1$ ან $503\vdots x_1^3 \Leftrightarrow x_1=1$ ანუ მივიღეთ $x_1=1$

და განტოლება $y^3+z^3=503(yz+1)$

2) x კენტია, მაშინ მარჯვენა მხარე $\vdots x^3$ ხოლო $(xyz+2;x)=$
$=(2;x)=1$ ანუ ან $x=1$ ან $2012\vdots x^3 \Leftrightarrow x=1$ ანუ
ამ შემთხვევაშიც $x=1$ და განტოლება $y^3+z^3=2012(yz+2)$

~~განვიხილოთ 1 შემთხვევა $y^3+z^3=503(yz+1)$~~

~~$(y+z)(y^2-yz+z^2)=503(yz+1)$~~

ვიგულისხმოთ ორივე შემთხვევაში და
$y\le z$ არ ვზღუდავთ ზოგადობას.

განვიხილოთ (1) შემთხვევა $y^3+z^3=503(yz+1)$

$(y+z)(y^2-yz+z^2)=503(yz+1)$ თუ $y\neq z\Rightarrow$

$(y-z)^2\ge 1$ ანუ $y^2-yz+z^2\ge yz+1$ ამიტომ $y+z\le 503$

განვიხილოთ $y+z=503$ მაშინ $y^2-yz+z^2=yz+1 \Leftrightarrow z-y=1$,

და 1-ის $2y+1=503$ $y=251$ $z=252$ მივიღეთ ამონახსნი

$(1;251;252)$ სხვა შემთხვევაში (თუ $y^2-yz+z^2>yz+1$) და რადგან

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

30.04.2013/ მათ/III/298

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

503 მარტივი რიცხვია, ამიტომ $(y+z;503)=1$. შესაბამისად

$y^2-yz+z^2 \vdots 503$ და $yz+1 \vdots y+z$

ასევე

$(y+z)(y^2-yz+z^2)=503(yz+1)$ $(y;z)=1$ რადგან $y^3+z^3=$

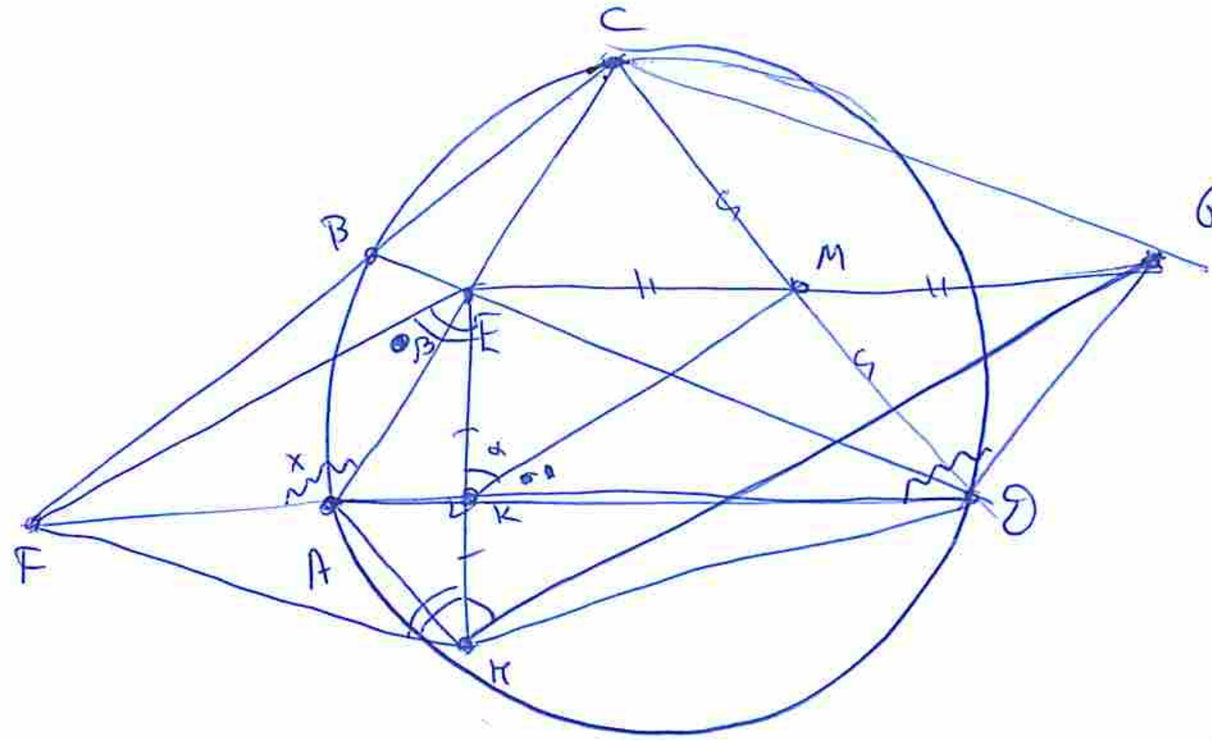
$=503(yz+1)$ და თუ $(y;z)=d$ მაშინ $(yz+1;d)=1$ ანუ

ან $d=1$ ან $503 \vdots d^3 \Rightarrow d=1$ ანუ $(y;z)=1$

ზემოთ აღნიშნულიდან [illegible] გამომდინარეობს რომ $d<2$ ან $d=1$

$yz+1 \vdots y+z$ $(y+z)^2-2(yz+1) \vdots y+z$ $y^2+z^2-2 \vdots y+z$.

ვიცით y^2+z^2-



რადგან □FCGD პარალელოგრამია ამიტომ CM = MD და FM = MG

ჩვენ უ.დ. □FHDG ჩაიხაზება. ანუ ∠FHG =

= ∠FDG შევნიშნოთ KM ხაზი ΔHFG-ს შუახაზია

ამიტომ ∠FHG = ∠FKM და F ∈ FH-ის ... ამიტომ

∠FHE = ∠FEH ხოლო რადგან DG ∥ AC ამიტომ

∠FDG = ∠FAE ანუ უ.დ. $\alpha + \beta = x \Leftrightarrow 90 - \alpha +$

$+ 90 - \beta = 180 - x$ ანუ ∠MKD + ∠EFA = ∠EAD ⟺

∠FEA = ∠MKD ⟺ ∠∘ = ∠∘∘

$\frac{FA}{\sin \circ} = \frac{FE}{\sin x} = \frac{AE}{\sin \angle EFA}$. ხოლო $\frac{MD}{\sin ?} = \frac{KD}{\sin \angle KMD} = \frac{KM}{\sin \angle KDM}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

30.04.2013/ მათ/III/298

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ $f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$

ჩავსვათ $y=-f(z)$: $f(x+f(0))=f(x+z)-f(z) \iff$

$f(x+z)=f(x+f(0))+f(z)$ (1)

(1)-და $f(x+f(y+f(z)))=$ ~~f(x+f~~ $f(x+f(0))+f(f(y+f(z)))$

ხოლო $y+f(x+z)=y+f(x+f(0))+f(z)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{f(x+f(0))}+f(f(y+f(z)))=y+\cancel{f(x+f(0))}+f(z)$

$y+f(z)\equiv A$ A ყველა Q მნიშვნელობას იღებს $y=(\forall x)-f(z)$

და მივიღეთ $f(f(A))=A$ ანუ $f(f(x))=x$ $\forall x\in Q$ -სთვის

ჩავსვათ $z=0$ $f(x+f(y+f(0)))=y+f(x)$.

$y=f(y)-f(0)$ ჩავსვათ : $f(x+f(f(y)))=$ ~~y+f(x)~~ ~~f(f(y))-y~~

ანუ ~~f(x+y)=~~ $=f(y)-f(0)+f(x)$ და $f(f(y))=y$ იყო და

$f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$ (2) [illegible] გამოვიყენოთ (2) თავდაპირ-

ველ განტოლებაში $f(x+f(y+f(z)))=f(x+f(y)+f(f(z))-f(0))=$

$=f(x+f(y)+z-f(0))=f(x+f(y))+f(z-f(0))-f(0)=$

$=f(x)+y-f(0)+f(z)+f(-f(0))-f(0)-f(0)=$

$=f(x)+y+f(z)+f(-f(0))-3f(0)$ ხოლო თავდაპირ-

ველ ~~..~~ ტოლობაში გვქონდა $y+f(x+z)=y+f(x)+f(z)-f(0)$

$\cancel{f(x)}+\cancel{y}+\cancel{f(z)}+f(-f(0))-3f(0)=\cancel{y}+\cancel{f(x)}+\cancel{f(z)}-f(0)\Rightarrow$

~~f=z~~ $\Rightarrow f(-f(0))=2f(0)$ ხოლო (2)-ში ჩავსვათ

~~$y=x$ [illegible] $x=$~~ $y=-x$ ჩავსვათ

$f(0)=f(x)+f(-x)-f(0)$ ანუ $f(x)+f(-x)=2f(0)$

ანუ $f(f(0))+f(-f(0))=2f(0)$ $0+f(-f(0))=2f(0)$

ანუ $f(-f(0))=2f(0)$ [illegible] ანუ ეს [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] ტოლობას $\forall a,b\in\mathbb{Q}$ $f(a+b)=f(a)+f(b)-$

$-f(0)$ [illegible] [illegible]

[illegible]

$f(a+b)=f(a)+f(b)-f(0)$

ჩავსვათ ~~[illegible]~~ $b=a$ $f(2a)=2f(a)-f(0)$ $(2a;a)$:

$f(3a)=f(2a)+f(a)-f(0)=2f(a)-f(0)+f(a)-f(0)=$

$=3f(a)-2f(0)$ ინდუქციით ვაჩვენოთ ~~$f((k-1)a)=(k-1)f(a)+$~~

$f(ka)=kf(a)-(k-1)f(0)$ დავუშვათ $k+1$-სთვის $f((k+1)a)=$

$=f(ka)+f(a)-f(0)=(k+1)f(a)-kf(0)$ ანუ $\forall m\in\mathbb{N}$-სთვის

$f(m\cdot x)=mf(x)-(m-1)f(0)$ $\forall x\in\mathbb{Q}$ მაშინ $f(m)=mf(1)-(m-1)f(0)$

$\forall m\in\mathbb{N}$ და $f(\frac{a}{b}\cdot b)=b\cdot f(\frac{a}{b})-(b-1)\cdot f(0)$ $f(a)=bf(\frac{a}{b})-(b-1)f(0)$

$bf(\frac{a}{b})=af(1)-(a-1)f(0)+(b-1)f(0)$ $bf(\frac{a}{b})=af(1)-(a-b)f(0)$

$f(\frac{a}{b})=\frac{a}{b}f(1)-(\frac{a}{b}-1)f(0)$ ანუ $\forall x\in\mathbb{Q}>0$-სთვის.

$f(x)=xf(1)-(x-1)f(0)$ ხოლო $f(-x)=2f(0)-f(x)=$

$=(-x)f(1)-(-x-1)f(0)$ ანუ $\forall x\in\mathbb{Q}$-სთვის

$f(x)=xf(1)-(x-1)f(0)$ ანუ პასუხი.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 15

30.04.2013/ მათ/III/ 298

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

პასუხი $f(x) = x f(1) - (x-1) f(0)$ სადაც $f(1)$ და $f(0)$ არის ნებისმიერი Q რიცხვები. ეს საძებნი ფუნქციაა!

$f(1) = a$ $f(0) = b$ და $\forall x \in Q$ $f(x) = xa - (x-1)b$.