შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2 | 30.04.2013/ მათ/III/292

ამოცანა № 1 | გვერდი № 1

$x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)$.

რადგან x უმცირესი გადავარჩიოთ x. $x=1$-ის დროს y და z ~~ნატურალური~~ არ არის მთელი და დადებითი. ვირჩევთ $x=2$.

$8(y^3+z^3)=2012(2yz+2)$

$y^3+z^3=503(yz+1)$.

$(y+z)(y^2-yz+z^2)=503(yz+1)$.

თუ $y+z=503$ და $yz+1=y^2-yz+z^2$ მაშინ ~~ჭეშმარიტება~~ ტოლობა შესრულდება.

$$\begin{cases} y+z=503 \\ yz+1=y^2-yz+z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=503 \\ y-z=\pm 1 \end{cases}$$

რადგან $z \geq y \Rightarrow z-y=1$

$$\begin{cases} y+z=503 \\ y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=251 \\ z=252. \end{cases}$$

მართლაც $2^3(251^3+252^3)=2012(2\cdot 251\cdot 252+2)$

$31816259=31816259$.

$x=2 \quad y=251 \quad z=252$. სხვა ამოხსნა იქნება არ არსებობს.

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2

30.04.2013/ მათ/III/ 292

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$f(x+f(y+f(z))) = y+f(x+z)$. იმ შემთხვევაში, თუ $f(x)=x$, $f(x+f(y+f(z))) = x+y+z$ და $y+f(x+z)=y+x+z$, ანუ როცა $f(x=x$, ტოლობა $f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$ სრულდება ნებისმიერი $x, y, z \in \mathbb{Q}$. ანუ ერთერთი ამონახსნია: $f(x)=x$.

თუ $x=0$, $y=0$, $z=k \Rightarrow f(0+f(0+f(k)))= f(f(f(k)))$,
$0+f(k+0)=f(k) \Rightarrow f(f(f(k)))=f(k) \Rightarrow f(f(k))=k$.