შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

30.04.2013/ მათ/III/281

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)$ $\quad x\le y\le z$

$x^3(y^3+z^3)\le 2z^6$

$2z^6\ge 2012\cdot(xyz+2)$

$z^6\ge 1006\cdot(x^3+2)$

$z^3\ge\sqrt{1006(x^3+2)}$

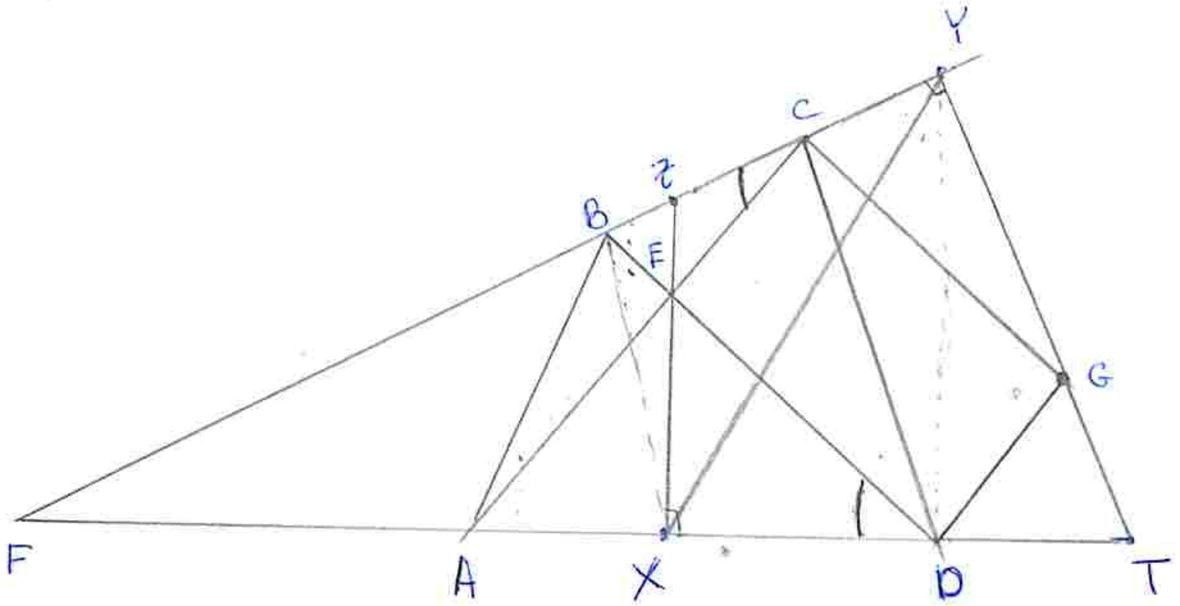
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7	30.04.2013/ მათ/III/ 281
ამოცანა № 2	გვერდი № 1

~~გამოვიყენოთ ლემები~~, ~~რომ~~
დავამტკიცოთ ლემა, რომ



თუ $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაში $BC \cap AD = F$ $Y = G \perp FC$
$X = E \perp FD$ მაშინ $XY \parallel GD$.

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

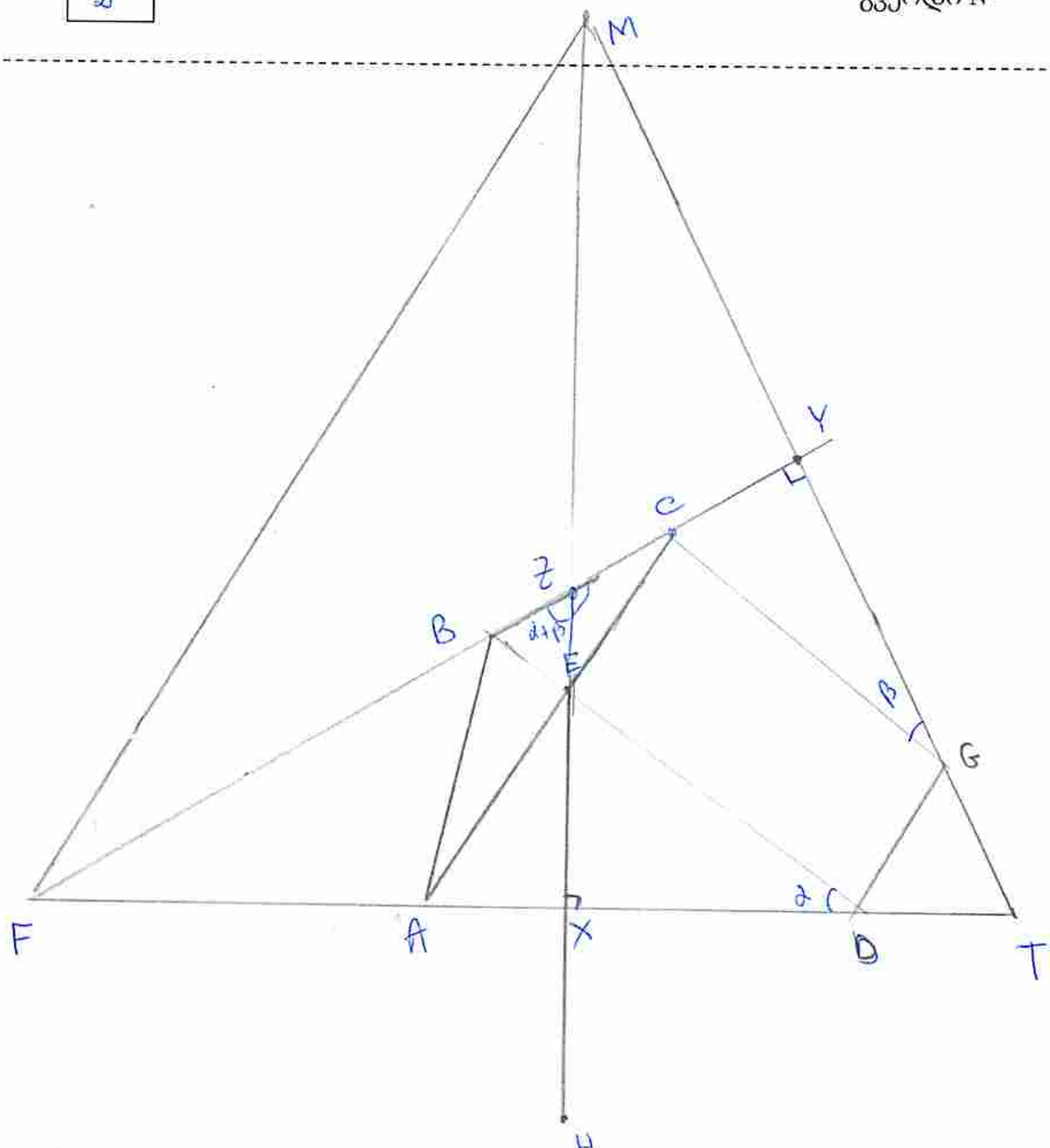
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7	30.04.2013/ მათ/III/ 281

ამოცანა № 2

გვერდი № 2



ვთქვათ M ისე რომ EH ∩ GY-იყოს M. თუ დავამტკიცებთ რომ $DE \perp FM$ მაშინ გამოვა რომ $H \in \omega_{MFD}$ -წრეწირი საიდან E ორთო ცენტრი გამოვა. $EX = EH$ $EX \perp FD$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

30.04.2013/ მათ/III/281

ამოცანა № 2

გვერდი № 3

$\angle BCA = \angle BDA = \alpha$ [illegible] $\angle CGT = \beta$ $\angle EDG = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CGD = 180 - x \Rightarrow \angle YTX = 180 - (180 - \beta - 180 + \cancel{x} + 180 - \cancel{x} - \cancel{\alpha}) =$

$= \alpha + \beta \Rightarrow \angle YZE = \overset{180-\alpha-\beta}{\cancel{\alpha+\beta}}$ $\angle ZEC = 180 - \angle YZE - \angle ZCE = \beta$

$\angle ZEC + \angle CED + \angle DEX = \beta + 180 - x + 90 - \alpha = 180$

$x = 90 + \beta - \alpha.$

[illegible] [illegible] $XY \parallel GD \Rightarrow \angle XYG = \angle DGT = 90 - \alpha$

$\angle YXD = \angle GDT = 90 - \beta$. ხოლო $MYXF$ [illegible]

ასე $\angle FMY = \angle YXT = 90 - \beta$ ხოლო $\angle MFT = 90 - \alpha$

$\angle FZX = 180 - \angle EZC = \alpha + \beta \Rightarrow \angle ZFX = 90 - \alpha - \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ZFM = \beta \Rightarrow GC \perp MF$ ხოლო $\angle YFM = \angle CGY$

$GC \parallel DE \Rightarrow DE \perp FM$ ანუ E არის [illegible] [illegible] ანუ

H არის AMD [illegible] [illegible] [illegible] G-ს

[illegible] $\angle MGD = \beta + 180 - x = 90 + \alpha$ $\angle MFX = 90 - \alpha$

ანუ ხოლო $\angle MGD + \angle MFX = 180$ ანუ G-ც [illegible] [illegible].

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

30.04.2013/ მათ/III/ 281

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)^{(1)} \Rightarrow$ ფუნქცია იღებს ყველა მნიშვნელობას Q-ში რადგან $y+f(x+z)$-ით ყველა მნიშვნელობას იღებს მაშინ არსებობს c რომ $f(c)=0$

ჩავსვათ $y=c-f(z)$ მივიღებთ რომ

$f(x+f(c))=f(x)=c-f(z)+f(x+z) \Rightarrow$

$f(x+z)=f(x)+f(z)-c$ თუ $c=0 \Rightarrow$

$f(x+z)=f(x)+f(z)$. დავამტკიცოთ რომ ასეთ ფუნქციას აქვს სახე $f(x)=kx$ $k\in Q$ $x\in Q$

თუ ვიცით რომ $f(0)=0$ ჩავსვათ მოცემულ პირობაში $x=0$ $z=c=0$ მივიღებთ, რომ $f(f(y))=y$

$y=0 \Rightarrow f(0)=0$. ასევე $f(x)+f(z)=f(x+z)$ (2)

ჩავსვათ x და $-x$ მივიღებთ რომ $f(x)=-f(-x)$ ანუ კენტია

დავამტკიცოთ ჯერ $k\in \mathbb{N}$ $f(kx)=f(x)$ ჩავსვათ (2)-ში

$(x;x)$ $f(2x)=2f(x)$ დავამტკიცოთ ინდუქციით რომ ვთქვათ

$f((k-1)x)=(k-1)f(x)$ $k\geq 3$ რომ $f(kx)=kf(x)$ ჩავსვათ (2)-ში

$((k-1)x;x) \Rightarrow f(kx)=(k-1)f(x)+f(x)=kf(x) \Rightarrow k\in \mathbb{N}$

$f(kx)=kf(x)$ ხოლო რადგან ფუნქცია კენტია $f(kx)=kf(x)$ $k\in \mathbb{Z}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

30.04.2013/ მათ/III/ 281

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

ახლა დავამტკიცოთ რომ $f(kx)=kf(x)$ $k\in\mathbb{Q}$ (2) ცხადია

შევამჩნიოთ გამოვიყენოთ მიმდევრობით $f(x)+f(z)+f(t)=f(x+z+t)$

სადაც ჩავსვით $(x; z+t) \Rightarrow f(x)+f(z+t)=f(x)+f(z)+f(t)=$

$= f(x+z+t) \Rightarrow f(a_1)+\dots+f(a_n)=f(a_1+\dots+a_n)$. ჩავსვათ

$a_1=a_2=\dots=a_n=\frac{1}{n}x \Rightarrow n\cdot f\left(\frac{1}{n}x\right)=f\left(n\cdot\frac{1}{n}x\right)=f(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\cdot x\right)=\frac{1}{n}\cdot f(x)$ $\quad f\left(\frac{m}{n}\cdot x\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}x\right)=m\cdot f\left(\frac{1}{n}x\right)=$

$=\frac{m}{n}\cdot f(x)$ სადაც $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow f(kx)=kf(x)$ $k\in\mathbb{Q}$

ვთქვათ $f(1)=t \Rightarrow f(x\cdot 1)=x\cdot f(1)=x\cdot t \Rightarrow f(x)=xt$

სადაც t შეიძლება იყოს ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი.

ჩავსვათ ~~ეს~~ (1)-ში მივიღებთ.

$tx+t^2y+t^3z=y+tx+tz \Rightarrow t^2y+t^3z=y+tz$ ჩავსვათ

$z=0$ $\quad t^2y=y \Rightarrow t^2=1$ რადგან $y\neq 0$ $\quad t=\pm 1$ ანუ $f(x)=\pm x$

ჩავსვათ $f(x)=x$ მივიღებთ რომ $x+y+z=x+y+z$; $f(x)=-x\Rightarrow$

$-x+y-z=-x+y-z$. ახლა ვთქვათ $c\neq 0$ შემოვიღოთ

ახალი ფუნქცია $g(x)=c-f(x)$ ჩავსვათ $f(x+y)=f(x)+f(y)-c$

და და მივიღებთ ~~$g(x+y)=g(x$~~ $c-g(x+y)=c-g(x)+c-g(y)-c$

$g(x+y)=g(x)+g(y)$ მივიღეთ იგივე ფორმულა რაც

დავამტკიცეთ რომ $g(0)=0 \Rightarrow g(x)=tx$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

30.04.2013/ მათ/III/ 281

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

ჩავსვათ (1) ში $x=0$, $z=c$ მივიღებთ რომ $f(f(y))=y$
$y=c \Rightarrow f(0)=c \Rightarrow g(0)=c-f(0)=0$ ჩავსვათ
$g(x)=c-f(x)$ ში $x=c$ მივიღებთ რომ $g(c)=c$.
$g(c)=c$. ვიცით რომ $g(x)+g(y)=g(x+y)$ $g(0)=0$
კოშის გ/ვ-ით ვასკვნით $g(x)=kx$ $x=c$
$g(c)=kc=c \Rightarrow k=1 \Rightarrow g(x)=x \Rightarrow f(x)=c-x$
$c\in Q$ $x\in Q$ შევამოწმოთ

$f(x+f(y+f(z)))=f(x+f(y+c-z))=f(x+c-y-c+z)=$
$=c-x+y-z=y+f(x+z)$ ანუ სრულდება

$f(x)=c-x$ $c\in Q$ $x\in Q$ და $f(x)=X$