შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

30.04.2013/ მათ/III/278

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x \le y \le z \qquad x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)$

$x^3(y^3+z^3)-2012xyz-4024=0$

დავაფიქსიროთ y და z. ამ განტოლების რაციონალური ამონახსნი, თუ არის $x_0=\frac{m}{n}$ სადაც $m\in Z$, ხოლო $n\in N$, მაშინ $4024 \vdots m$ და $y^3+z^3 \vdots n$, ხოლო რადგან x დადებითი და მთელი $\Rightarrow$ $n=1$ და $m=x \Rightarrow$

$\Rightarrow \surd \Rightarrow 4024 \vdots x$, ანუ $x=1$, $x=2$, $x=4$, $x=8$, $x=503$, $x=1006$, $x=2012$ ან $x=4024$

ანალოგიურად $x^3z^3-4024 \vdots y$ და $x^3y^3-4024 \vdots z$

$xy(x^2y^2-1006z)+xz(x^2z^2-1006y)=4024$

მარცხენა მხარის შესაკრებებიდან ერთ-ერთი მაინც უნდა იყოს დადებითი $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ რადგან $x^2z^2-1006y > x^2y^2-1006z$

$x^2z^2-1006y>0$

$x^2z^2>1006y \qquad x\le y \Rightarrow 1006y<x^2z^2\le y^2z^2 \Rightarrow 1006y<y^2z^2$

$y\le z \Rightarrow 1006<yz^2<z^3 \Rightarrow z^3>1006 \Rightarrow z\ge 11$

$x^3(y^3+z^3)\le 2z^6$ და $2012(xyz+2)\ge 2012x^3+4024 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2z^6 \ge 2012x^3+4024$

$z^6\ge 1006x^3+2012$

$x^3\le \frac{z^6}{1006}-2$

მაგიდა № 14

30.04.2013/ მათ/III/ 278

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

$xy(x^2y^2-1006z)+xz(x^2z^2-1006y)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(1006z-x^2y^2)<z(x^2 \cancel{y} z^2-1006y)$

$2012yz \le x^2(y^3+z^3) \le 2z^5 \Rightarrow y<\frac{2z^4}{2012}=\frac{z^4}{1006}$

$2012yz \ge 2012x^2 \Rightarrow 2012\cancel{x^2}<\cancel{x^2}(y^3+z^3)$ დ $2z^{\cancel{8}4}>2012x^{\cancel{8}}\cancel{z}$

$x^2<\frac{z^{\cancel{8}4}}{1006}$

$y^3+z^3>2012$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

30.04.2013/ მათ/III/ 278

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$

$y+f(x+z)$-ს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი რაციონალური მნიშვნელობა, რადგან y თავისუფალი ცვლადია $\Rightarrow$ $\forall a\in Q$ $\exists b$, ისეთი, რომ $f(b)=a$ (1)

ჩავსვათ $x=0$: $f(f(y+f(z))=y+f(z)$

$y+f(z)$-ს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი რაციონალური მნიშვნელობა $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall a\in Q$ $f(f(a))=a \Rightarrow$ $f(m)=n \Leftrightarrow f(n)=m$

~~ჩავსვათ $x=y=z\in Q$ $f(x+f(x+f(x)))=x+f(2x)$~~

~~ჩავსვათ $x=y\in Q$ $z=f(x)$ $f(x+f(x+f(f(x))))=x+f(x+f(x))$~~

~~$f(f(x))=x \Rightarrow f(x+f(2x))=x+f(x+f(x))$~~

ვთქვათ, რომ;

$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\dots+a_0$, მისი კოეფიციენტები რაციონალურია.

$f(x+f(y+a_n\cdot z^n+\dots+a_0))=y+a_n\cdot(x+z)^n+\dots+a_0$

$f(x+a_n\cdot(y+a_n\cdot z^n+\dots+a_0)^n+\dots+a_0)=y+a_n(x+z)^n+\dots+a_0$

$a_n\cdot(x+a_n\cdot(y+a_n\cdot z^n+\dots+a_0)^n+\dots+a_0)^n=y+a_n(x+z)^n+\dots+a_0$

z y-ის მიმართ

x და y დავაფიქსიროთ, მაშინ ვხედავთ, რომ z პოლინომების ტოლია $\Rightarrow$

z y-ის

$\Rightarrow$ მაქსიმალური ხარისხის შემცველი წევრები ტოლია $\Rightarrow a_n^{n+2}\cdot z^{n^3}=a_n\cdot z^n \Rightarrow$

$\Rightarrow n^3=n \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=\pm1 \\ n=0 \end{array}\right.$

~~$\Rightarrow a_n(a_n y^n)^n=y$~~

~~$a_n^{n+1}\cdot y^{n^2}=y \Rightarrow a_n\neq0$ და $n^2=1 \Rightarrow n=\pm1$~~

[illegible]

როცა $n=-1$ $a_n\in Q$

როცა $n=1$ $\left[\begin{array}{l} a_n=\pm1 \\ a_n=0 \end{array}\right.$

როცა $n=0$ $\left[\begin{array}{l} a_n=1 \\ a_n=0 \end{array}\right.$

მაგიდა № 14

30.04.2013/ მათ/III/ 278

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

ანუ განსახილავი გვაქვს რამდენიმე შემთხვევა:

1. $f(x)=a_0$, ანუ მუდმივი ფუნქცია. ეს შეუძლებელია, რადგან მაშინ (1) არ სრულდება

2. $f(x)=a_n\cdot x^{-1}+a_0=\frac{a_n}{x}+a_0$. ამ შემთხვევაში გამოდის, რომ

$a_n\cdot q\cancel{+a_0}=y+a_n\cdot p\cancel{+a_0}$, სადაც q და p რაციონალური რიცხვებია.

y გამოდის დამოკიდებული x-ზე, z-ზე და k-ზე.

3. $f(x)=x+a_0$, ანუ $f(x+f(y+z+a_0))=y+x+z+a_0$

$$f(x+y+z+2a_0)=y+z+x+a_0$$

$$x+y+z+3a_0=x+y+z+a_0 \Rightarrow a_0=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)=x$ გვაწყობს

4. $f(x)=-x+a_0$, ანუ $f(x+f(y-z+a_0))=y\overset{-}{\cancel{+}}x-z+a_0$

$$f(x+z-y\cancel{-a_0}\cancel{+a_0})=y-x-z+a_0$$

$$y-x-z+a_0=y-x-z+a_0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)=-x+a_0$, სადაც a_0 ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, გვაწყობს.

ანუ ასეთი ფუნქციებია $f(x)=x$ და $f(x)=-x+a_0$ $(a_0\in Q)$