



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 10

30.04.2013/ მათ/III/ 270

ამოცანა №

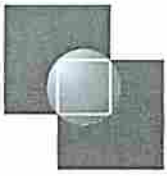
1

გვერდი №

1

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2)$$

$(xyz + 2)$ ან იგივე $x \neq 2$, ან $x \neq 2$



მაგიდა № 10

30.04.2013/ მათ/III/ 270

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z)$$

ჩავსვამთ $x = y = 0$

მივიღებთ

$$\underline{f(f(f(z))) = f(z)}$$

ჩავსვამთ $x = 0$

მივიღებთ $f(f(y + f(z))) = y + f(z)$

დავინახეხი $x \in \mathbb{Q}$ ზეიძლება ნახამოვიწყალ
 $y + f(z)$ სახით, სადაც $y, z \in \mathbb{Q}$.

მივიღებთ ხმად $\underline{f(f(x)) = x}$.

შევიხივოთ ხმად, თუ $f(a) = b$ აქვს
 $f(f(a)) = f(b)$ ანუ $\underline{a = b}$.

ასეა, შევიხივოთ, ხმად თუ $f(a) = b$ აქვს
 $f(f(a)) = f(b)$ ანუ $\underline{f(b) = a}$.

~~$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z)$$~~

~~$$x + f(y + f(z)) = f(y + f(x + z))$$~~

~~$$x + f(y + f(z)) = f(y + f(x + f(f(z))))$$~~

~~დავინახეხი ვახივებთ ან ვახივებთ მოცემულ ფორმულაში
ყალბი პირობები ჩავსვამთ x, y და ვიღებთ y, x ხოლო z და ვიღებთ $f(z)$~~

~~აქვს~~

~~$$f(y + f(x + f(f(z)))) = x + f(y)$$~~



მაგიდა № 10

30.04.2013/ მათ/III/ 270

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z).$$

~~ჩავსვით $z = y + z + z$~~

~~დავსვით $z = -f(0)$ $z = f(0)$~~

~~$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z)$$~~
~~$$f(x + f(y + f(-f(0)))) = y + f(x + (-f(0)))$$~~
~~$$f(x + f(y + f(f(0)))) = y + f(x + f(0))$$~~
~~$$f(x + f(y + f(0))) = y + f(x + f(0))$$~~

$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z)$$

$$f(z + f(y + f(x))) = y + f(z + x)$$

$$\therefore f(x + f(y + f(z))) = f(z + f(y + f(x)))$$

$$x + f(y + f(z)) = z + f(y + f(x))$$

~~$f(y + f(z)) = f(y + f(x))$~~

ჩავსვით $x = 0$ და $z = f(0)$
და $z = 0$ და $x = f(0)$

დავინახოთ

$$f(x) + f(y + z) = f(z) + f(y + x)$$

~~ჩავსვით $z = 0$ და $x = f(0)$~~

~~$$f(y) = f(y + f(0)) + f(0)$$~~

~~$$y = f(f(0)) + f(y + f(0))$$~~
~~$$= y + f(f(0)) + 0$$~~

\therefore ნებისმიერ y -სათვის

$$f(y + x) - f(x) = f(y)$$

ნებისმიერ x -სათვის

f ფუნქციისათვის უნდა იქონიებდეს



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 10

30.04.2013/ მათ/III/ 270

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

$$f(x) = kx + b$$

ჩვენს შემთხვევაში ვაჩვენებთ $f(f(x)) = x$

$$\therefore f(kx + b) = x.$$

$$k(kx + b) + b = x.$$

$$k^2 x + (k+1)b = x$$

$$x(k^2 - 1) = -(k+1)b.$$

~~შეშინდებით~~ ნებისმიერი x -ისთვის.
შევიღებთ, რომ $k = -1$.

ამოვიღებთ $x = y + z$.

$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z).$$

ანუ

$$x + y + z + 3b = y + x + z + b.$$

$$\therefore b = 0.$$

$$\therefore f(x) = x.$$