



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

30.04.2013/ მათ/III/263

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

დავუშვათ $X \equiv P$, სადა $P > 2$ და P -მრავალი. გვაქვს $X^3 \equiv (y^3+z^3) \equiv P^3$, მას
 $Xy+z \equiv z \pmod{P}$ ანუ $Xy+z \equiv P$ ან $2012 \equiv P^3$ გვაქვს $2012 = 2 \cdot 2 \cdot 503$
 და ან $P > 2$ მას $2012 \equiv P^3$ ან ძვილი ნიშანდობის ან $X \equiv P$ ან
 $P > 2$. მას $X = 2^d$ სადა $d > 1$ მას $X^3 \equiv 2^{3d}$, $2012 \equiv 2^3$ და
 $Xy+z \equiv 4$ სადა $Xy+z \equiv 4$ სადა $d > 1$ მას $2012 \equiv 2^4$ გვაქვს
 $3d > 4$ ან $d > 1$ სადა $d \leq 1$. დავიხსნათ $d=1$ და $d=0$
 1) ან $d=0$ მას $8(y^3+z^3) = 4 \cdot 503(2y+z) \Rightarrow y^3+z^3 = 503(y+z)$
 მას $y^3+z^3 \equiv 503$, $\Rightarrow y^6-z^6 \equiv 503$ გვაქვს ერთი ერთი უარყოფითი ანბნა
 $y^{502}-z^{502} \equiv 503$ მას $y^{502} \equiv 503$ ან $y^{502} \equiv 0$ ან $y^{502} \equiv 503$; $y^{502} \equiv 0$ ან
 $y^2-z^2 \equiv 503 \Rightarrow (y-z)(y+z) \equiv 503$ მას ან $y+z \equiv 503$
~~ან $y+z \equiv 503$ ან $y+z > 503$, ან $y=z$ მას $2y^3 = 503(y^2+1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow y^2(2y-503) = 503 \Rightarrow 503 \mid y^2 \Rightarrow y=1$. მას $2 = 2 \cdot 503$ ან ან ან (ანა)
 ან $y+z \Rightarrow y+z > 503$ მას $y^3+z^3 = (y+z)(y^2+yz+z^2) \geq 504$
 მას $y^3+z^3 = (y+z)(y^2+yz+z^2) = (y+z)((y-z)^2 - yz) \equiv 503$, ან $y+z \equiv 503$ მას
 $(y-z) \equiv 503$ ან $y^2-z^2 \equiv 503$, მას $(y-z)^2 - yz \equiv 503 \Rightarrow yz \equiv 503 \Rightarrow y$ ან z
 ან 503 , ან y ან z ან 503 ან $y-z \equiv 503$ ან $y \equiv 503$, $z \equiv 503$.
 მას ან $y = y_1 \cdot 503$ და $z = z_1 \cdot 503$ მას $(y+z)(y^2+yz+z^2) = 503(y_1+z_1)(y_1^2+z_1^2-y_1z_1) =$
 $= 503(y_1+z_1) \Rightarrow (y_1+z_1)(y_1^2+z_1^2-y_1z_1) = y_1+z_1 \Rightarrow (y_1+z_1)(y_1^2+z_1^2) = (y_1+z_1+1)y_1z_1$.
 $y_1^2+z_1^2 \geq 2y_1z_1$ ან $y_1, z_1, (y_1^2+z_1^2) \geq 2(y_1z_1)y_1z_1$ ან $y_1+z_1 > 1$ ან
 $2(y_1+z_1)y_1z_1 \geq (y_1+z_1+1)y_1z_1$ ან $y_1+z_1 > 1$ ან $y_1, z_1 \geq 503$ ან $z_1 \geq 503$ ან $y_1, z_1 \geq 503$~~



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

30.04.2013/ მათ/III 263

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

რამ $(y+z)(y^2+z^2) > (y+z+1)yz+1$ ან $y^3+z^3 > 503(yz+1)$. ან
 $\Leftrightarrow yz > 503$ ან $z+y > 503$. იქნება $z+y \geq 503$
 ამას ან $z=y$ გვაქვს $2z^3(z^2+z^2-1) = 503(z^2+1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2z^3 = 503(z^2+1) \Rightarrow z:503 \Rightarrow z \geq 503$ გვაქვს ~~$x^2 > 503x^2 + 503$~~
 ~~$x^2 > 503(x^2+1)$~~ ან $z \neq y$ გვაქვს $(y-z)^2 \geq 1$ ამას ან $y+z > 503$ გვაქვს
 $(y+z)((y-z)^2+yz) > 503((y-z)^2+yz)$ ამას $(y-z)^2 \geq 2yz+1$ ან $(y-z)^2+yz \geq$
 $\geq yz+1$ ან $(y+z)((y-z)^2+yz) > 503(yz+1)$ ან $y+z \leq 503 \Leftrightarrow y+z:503$ ან
 $y+z=503$ გვაქვს $503(y^2+z^2-yz) = 503(yz+1) \Rightarrow y^2+z^2-yz = yz+1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (y-z)^2 = 1 \Rightarrow y-z=1$ ან $y+z=503$ ან $\boxed{y=252 \text{ ან } z=252}$

შენიშვნა
 8) ან $x=1$ გვაქვს $(y+z)(y^2+z^2-yz) = 2012(yz+1)$ ამას იგივე გვაქვს
 $y^3+z^3:503, \Rightarrow y^6-z^6:503, y^6-z^6:503 \Rightarrow \begin{matrix} (6,503) \\ (6,503) \end{matrix} y-z:503 \Rightarrow$
 $\Rightarrow z^2-y^2:503 \Rightarrow (z+y)(z-y):503$ ამას ან $z-y:503$ ან
 $z+y:503$ გვაქვს $(z+y)((z-y)^2+yz):503 \Rightarrow (z-y)^2+yz:503 \Rightarrow yz:503$
 ან $y-z:503$ გვაქვს $y:503$ ან $z:503$ გვაქვს $y+z:503$ ან \Leftrightarrow
 იგივეა ან $y+z:503$ ამას ან y ან z სხვა რაღაცაზე, სხვა რაღაცაზე
 გვაქვს $y+z:503$, $y^2+z^2+yz:503$ ან $y^2+z^2+yz:503$ ან y ან z სხვა რაღაცაზე
 სხვა რაღაცაზე ~~$y+z:503$~~ ან $y+z:503$ ან $y+z:503$ ან $y+z:503$ ან $y+z:503$
 $y^2+z^2-yz:503$, გვაქვს ან $y^2+z^2-yz=yz+1 \Rightarrow (y-z)^2=1$ ან $y+z:503$ ან
 ან $y+z:503$ ან $y+z:503$ ან $y+z:503$ ან $y+z:503$ ან $y+z:503$ ან $y+z:503$



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

30.04.2013/ მათ/III/263

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

ჩვენთვის $x=y=0$, არის $f(f(f(0)))=f(0)$ ჩვენთვის
 $x=y=0$ და z ავსებთ z ავსებთ z , არის
 $f(f(f(z)))=f(z)$ ჩვენთვის. $x=0$ და $y=-f(z)$ ავსებთ
 z ავსებთ. არის $f(f(-f(z)+f(z)))=-f(z)+f(z) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(f(0))=0$
 და ჩვენთვის ჩვენთვის $x=0$ ავსებთ z ავსებთ
 $\Rightarrow f(f(f(z)+y))=f(z)+y$ არის ავსებთ z ავსებთ
 $f(x)$ არის z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ
 x და z და ავსებთ y ავსებთ $y+f(x+z)$ ავსებთ z ავსებთ
 z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ $f(x+f(y+f(z)))$ ავსებთ
 z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ
 $f(f(f(x)))=f(x)$, $f(f(0))=0$, $f(f(f(z)+y))=f(z)+y$
 არის z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ $f(f(f(z)+y))=f(z)+y$
 z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ $y=a-f(z)$ არის
 $f(f(a))=f(a)$. არის z ავსებთ $f(a)$ არის z ავსებთ
 z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ $x \in \mathbb{Q}$ ავსებთ $f(f(x))=x$.
 არის z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ
 z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ z ავსებთ $f(x+f(y+f(z)))=f(x+f(y+z))=f(x+y+z)$



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

9

30.04.2013/ მათ/III/ 263

ამოცანა №

3

გვერდი №

2

↳ $f(x) + f(x+z) = x+x+z$ და d უმცირესი დადებითი
თავსი და $f(x) = x$

პასუხი: $f(x) = x$