შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 9

30.04.2013/ მათ/III/259

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)$.

თუ $(2012;x)=1 \Rightarrow xyz+2 \vdots x \Rightarrow 2 \vdots x$, რადგანაც x ლუწი არაა, იმიტომ, რომ $(2012;x)=1 \Rightarrow x=\pm1$, ე $(2012;x)\neq 1 \Rightarrow 2012=4\cdot 503$, სადაც 503 მარტივი რიცხვია $\Rightarrow$ x ე $|x|\neq 1 \Rightarrow 2012 \vdots x^3$, ~~$\Rightarrow xyz+2$~~ 2012 შეიძლება გაყოს მხოლოდ x^2-ზე, $\Rightarrow xyz+2 \vdots x \Rightarrow 2 \vdots x \Rightarrow x$ უკვე შეიძლება არის ან ±1 ან ±2.

თუ $x=1 \Rightarrow y^3+z^3=2012(yz+2)$, სადაც $y;z\in N$ და $z\geq y$, დავუშვათ $(y;z)=d \Rightarrow y=dy_1$ $z=dz_1$, სადაც $(y_1;z_1)=1$

$$d^3(y_1+z_1)(y_1^2-y_1z_1+z_1^2)=2012(d^2y_1z_1+2),$$ რადგან

$2012=4\cdot 503$ და 1-ის გარდა არცერთ კუბს არ ყოფს $\Rightarrow d^2y_1z_1+2 \vdots d \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d=2$ ან $d=1$, რადგან $d\in N$, თუ $d=2$.

$$8(y_1+z_1)(y_1^2-y_1z_1+z_1^2)=2012(4y_1z_1+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1^3+z_1^3=(2y_1z_1+1)\cdot 503$$ ~~$y_1^3>y_1^2$ დავუშვათ y_1 და z_1-ერთ~~

~~რადგანაც ორივე არის არა $\Rightarrow$ $y_1^3>y_1^2$, $z_1^3>z_1^2$ $\Rightarrow y_1^3+z_1^3>y_1^2+z_1^2$~~ $\geq 2y_1z_1 \Rightarrow$

~~$\Rightarrow y_1^3+z_1^3\geq y_1^2+z_1^2+1$~~ $\geq 2y_1z_1+1 \Rightarrow$

~~$\Rightarrow$ ე წერტილი~~

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

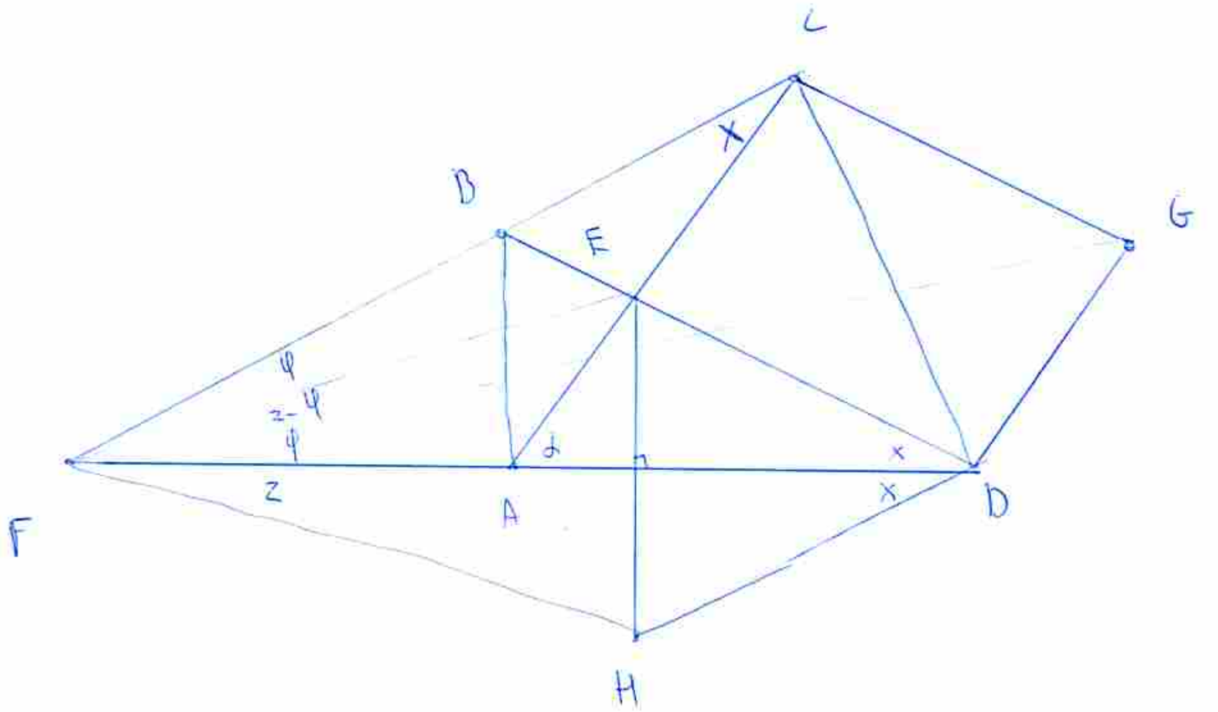
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 9

30.04.2013/ მათ/III/ 259

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



ვაჩვენოთ, რომ ~~ΔFBE ∼ Δ~~ $\angle BFE = \angle GFD$

$\angle \cancel{B} DBC = \alpha$ $\quad \angle BCA = \beta \Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{FB}{FD} \Rightarrow$

$\angle FBD = 180 - \alpha$ $\quad \angle BDF = \beta$

$\Rightarrow \frac{BE}{GD} = \frac{BE}{CE} = \frac{FB}{FD}$ და $\angle FBE = \angle FDG$, რადგან $\angle FBE =$
$= \angle FAE = \angle FDG$

პროპორციულობის გამო $\Rightarrow \triangle FBE \sim \triangle FDG \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle FBE = \angle FDG$

$$\frac{FG}{FE}=\frac{FG}{FH}=\frac{DG}{BE}=\frac{EC}{BE}=\frac{ED}{AE}$$

$\angle ADH \equiv x \quad \angle CAD = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{FG}{FE}=\frac{ED}{AE}=\frac{\sin\alpha}{\sin x} \Rightarrow \frac{FG}{FH}=\frac{FG}{FH}=\frac{\sin\alpha}{\sin x}=\frac{\cancel{\sin\angle FGH}}{\cancel{\sin\angle}}\ \frac{\sin\angle FHG}{\sin\angle FGH}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\angle GHD = \angle BFE$ და ჩვენი ამოცანა ამოხსნილი იქნება, რადგან $\angle BFE = \angle DFG$.

$\angle HDG = x + 180 - \alpha = 180 + x - \alpha.$

$\angle CFA = \angle CAD - \angle FCA = \alpha - x$

~~$\angle CFA = \angle GFH$, რადგან~~ ~~$\angle CFG = \angle DFH$~~

$\angle CFE \equiv \varphi = \angle GFD = \varphi.$

$\angle HFD \equiv z \Rightarrow \angle EFD = z \Rightarrow \angle EFG = z - \varphi \Rightarrow$

~~$\Rightarrow \angle GFC = \angle GFH$~~ $\Rightarrow \angle CFA = z + \varphi = \angle GFH.$

$\Rightarrow \angle HFG = \alpha - x \Rightarrow \angle HFG + \angle HDG = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow F; H; D; G$ ერთ წრეზეა.

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 9

30.04.2013/ მათ/III/259

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$f: Q \to Q$.

$$f(x+f(y+f(z))) = y+f(x+z). \qquad (1)$$

(1): $y=-f(z)$

$$f(x+f(0)) = -f(z)+f(x+z) \qquad (2).$$

$$f(x+z) = f(x+f(0)) + f(z) \qquad (3).$$

$x=z=0 \Rightarrow f(f(0))=0$

(1): $\overset{z=0}{\Rightarrow}$ $f(x+f(y+f(0))) = y+f(x)$.

$f(x+f(y+z)-f(z)) = y+f(x)$.

$x=f(z) \Rightarrow f(f(y+z)) = y+f(f(z))$

$z=0 \Rightarrow f(f(y))=y$.

თუ $f(a)=f(b)$ და $a\neq b \Rightarrow a=f(f(a))=f(f(b))=b \Rightarrow$ ფუნქცია ცალსახა

$f(x+z)-f(z) = f(x+f(0))$

$f(a)-f(b) = f(a-b+f(0))$.

$a-b = f(f(a))-f(f(b)) = f(f(a)-f(b)+f(0)) \Rightarrow$ თუ $a-b=k$ სადაც $k\in Q$ მაშინ,

რომ ფუნქცია ალბათ ნებისმიერი მონოტონური და ფუნქცია ცალსახა.

თუ მაშინ რომ ფუნქცია ზრდადი ~~არ~~ , ამ თუ $f(y)>y \Rightarrow y=f(f(y))>f(y) \Rightarrow$ $\cancel{f(y)}=y$.

~~წინააღმდეგობა თუ ფუნქცია კლებადი, ამ~~ წინააღმდეგობა.

თუ $f(y)<y \Rightarrow y=f(f(y))<f(y)$ წინააღმდეგობა, $\Rightarrow f(y)=y$, ანალოგიური მსჯელობით

თუ ფუნქცია კლებადი მაშინ რომ $f(y)=y$. $f(x)=x$ შევამოწმოთ:

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 9

30.04.2013/ მათ/III/ 259

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

$f(x+f(y+f(z))) = y+f(x+z)$

$x+y+z = y+x+z.$

მივიღეთ, რომ ფუნქცია არის ზრდადი არის კლებადი. $f(0)\equiv c \Rightarrow f(c)=0$

და მივიღეთ, რომ $f(0)=0$, ამიტ.

$f(x+z)=f(x)+f(z)$, ამიტ $f(1)\equiv k$

$f(2)=2f(1)=2k$, ვაჩვენოთ რომ $f(n)=nk$, სადაც $n\in N$.

$f(i)=ik$, ვაჩვენოთ, რომ დავუშვათ სამართლიანია, რომ 1-დან n-მდე ყველა i-სთვის

$f(n+1)=(n+1)\cdot k.$

$f(n+1)=f(n)+f(1)=nk+k=(n+1)\cdot k$, მივიღეთ, რომ $\forall n\in N \Rightarrow f(n)=nk$.

$0=f(0)=f(-1+1)=f(-1)+f(1) \Rightarrow f(-1)=-k$

$f(-2)=f(-1-1)=f(-1)+f(-1)=-2k$, დავუშვათ სამართლიანია, რომ $f(-i)=-i\cdot k$, სადაც

$i<0\in Z$ ვაჩვენოთ, რომ $f(-i-1)=-(i+1)\cdot k$

$f(-i-1)=f(-i)+f(-1)=-ik-k=-k(i+1)$, მივიღეთ, რომ

$\forall z\in \mathbb{Z} \Rightarrow f(z)=zk$

$k=f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot k.$ ვაჩვენოთ $f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{k}{n+1}$

დავუშვათ $\forall n\in N$ 1-დან n-მდე $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot k$,

ჩავსვათ $x=y=z=1$, ~~[illegible]~~ $\Rightarrow k=1$, მივიღეთ რომ $f(z)=zk$, სადაც $z\in Z$.