მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

30.04.2013/ მათ/III/ 242

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x\le y\le z$ $\quad x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)$

~~2012~~ $\quad x^3(y^3+z^3)=2012\cdot xyz+2012\cdot 2$

მარჯვენა მხარე იყოფა x და მარცხენა იყოფა $2012\cdot xyz$ იყოფა x-ზე

$2012\cdot 2$-იც იყოფა x-ზე $\quad 2012\cdot 2=2^3\cdot 503 \quad 2^3\cdot 503 \vdots x$ ვიცით

503 მარტივია ანუ x არის $2^\alpha\cdot 503^\beta$ სადაც $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ და $0\le\alpha\le 3$, $0\le\beta\le 1$

თუ $\beta=1$ ანუ $x\vdots 503$ მაშინ მარცხ. მხარე იყოფა x^3 ანუ იყოფა x^2 ანუ იყოფა 503^2-ზე $2012\cdot xyz$ იყოფა 503^2-ზე მაგრამ 2012 იყოფა 503-ზე(?) x-იც იყოფა 503 ანუ $2012\cdot 2$-იც უნდა იყოფოდეს 503^2 რაც არ ხდება ანუ ~~x~~ $\beta\ne 1$ ანუ $\beta=0$ ანუ $x=2^\alpha$ სადაც $\alpha=0,1,2,3$ ანუ x არის $1,2,4,8$,

ანუ $x \not\vdots 503 \Rightarrow y^3+z^3\vdots 503 \Rightarrow y^3\equiv -z^3 \pmod{503} \Rightarrow y^6\equiv z^6 \pmod{503}$

ფერმას მცირე თეორემით $\quad y^{502}\equiv z^{502} \pmod{503}$ ანუ $y^{(6,502)}\equiv z^{(6,502)} \pmod{503}$ ანუ $y^2\equiv z^2 \pmod{503}$ ანუ $(y-z)(y+z)\vdots 503$.

$x^3(y^3+z^3)=x^3(y+z)(y^2-yz+z^2)=x^3(y+z)(y-z)\cdot y+x^3(y+z)\cdot z^2$

$x^3(y+z)(y-z)\cdot y\vdots 503$ რადგან $(y-z)(y+z)\vdots 503$ ანუ სხვაობა(?) იყოფა ... $x^3(y+z)\cdot z^2\vdots 503 \Rightarrow \underline{(y+z)z^2\vdots 503}$ ანუ $y,z\vdots 503$ ანუ რადგან $y^3+z^3\vdots 503 \Rightarrow z\vdots 503 \Rightarrow y^3+z^3\vdots 503^3$ ანუ $2012(xyz+2)\vdots 503^3$ $2012xyz\vdots 503^3$ რადგან $2012, y, z$ იყოფა 503 ანუ $2012\cdot 2\vdots 503^3$ რაც შეუძლებელია ანუ $z\not\vdots 503$ ანუ $y+z\vdots 503$ რადგან z არ იყოფა 503.

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

30.04.2013/ მათ/III/242

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

ანუ მივიღეთ რომ $y+z \vdots 503$.

~~$x>4$~~ ახლა ~~განვიხილოთ~~ განვიხილოთ $x=1$ $x=2$ $x=4$ $x=8$ შემთხვევები

და $x=1 \Rightarrow$

$$y^3+z^3=2012(yz+2)$$

$$(y+z)(y^2-yz+z^2)=503\cdot 4(yz+2)$$

$(y+z)\vdots 503 \Rightarrow y+z \geq 503$ ~~და $y^2-yz+z^2 \leq 4(yz+2)$~~

$$z \geq 503-y.$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

30.04.2013/ მათ/III/ 242

ამოცანა № 3

გვერდი № 1.

$f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$ $x,y,z\in\mathbb{Q}$

პირველ რიგში ჩავსვათ $x=z=0$

$f(f(y+f(0)))=y+f(0)$ $f(0)=d$ სადაც d რაციონალურია

ანუ $f(f(y+d))=y+d$ სადაც $y+d$ შეიძლება ნებისმიერ რაციონალურს

შეიძლება ნებისმიერი q-რაციონალური რიცხვისთვის ავიღოთ $y=q-d$ q და d რაციონალურია ანუ y-იც რაციონალური

ანუ ნებისმიერი q-სთვის თუ $y+d=q$-ა $f(f(q))=q$ (1)

ყოველი $q\in\mathbb{Q}$-სთვის.

ჩავსვათ $z=0$ და $y=-f(0)$ => $f(x+f(0))=f(x)-f(0)$ (2)

ჩავსვათ $y=-f(z)$

$f(x+f(0))=f(x+z)-f(z)$

(2)-ის თანახმად $f(x+f(0))=f(x)-f(0)$ => $f(x)-f(0)=f(x+z)-f(z)$

$f(x)+f(z)-f(0)=f(x+z)$ ანუ $f(x+z)=f(x)+f(z)-d$

ჩავსვათ $x=z$ მივიღებთ $f(2x)=2f(x)-d$ დავუშვათ რომ

$f(kx)=k\cdot f(x)-(k-1)d$ და დავამტკიცოთ რომ ეს სწორია $k+1$-ისთვის

ჩავსვათ $f(x+z)=f(x)+f(z)-d$-ში $x=kx$ და $z=x$ მივიღებთ

$f((k+1)x)=f(x)+f(kx)-d=f(x)-d+k\cdot f(x)-(k-1)d=(k+1)f(x)-kd$

ანუ ყოველი ნატურალური k-სთვის $f(kx)=k\cdot f(x)-d(k-1)$ (3) ნებისმიერი

$q>0$-ისთვის $q=\frac{m}{n}$ სადაც $m,n\in\mathbb{N}$ ავიღოთ და განვიხილოთ $f(q)=f(\frac{m}{n})$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

30.04.2013/ მათ/III/242

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

გაგრძელება

(3)-ის თანახმად $f(\frac{1}{n})$-ის [illegible] ნებისმიერი x

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) - (m-1)d$$

(3)-ის თანახმად

$$n\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) - (n-1)d = f(1) \Rightarrow \frac{f(1)+(n-1)\cdot d}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right)$$ ჩავსვათ

ეს რომ ჩავსვათ მივიღებთ

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m\cdot\left(\frac{f(1)+(n-1)d}{n}\right) - (m-1)d = f(1)\cdot\frac{m}{n} + \frac{m}{n}(n-1)\cdot d - (m-1)d =$$

$$= f(1)\cdot\frac{m}{n} + d - \frac{m}{n}d$$

$\frac{m}{n} = q$ ანუ $f(q) = f(1)\cdot q + d(1-q)$ ყოველი $q>0$-თვის.

ანუ $f(q) = q(f(1)-d) + d$ $\quad f(1)-d \equiv k$ $\quad d \equiv b$ ვთქვათ

k და b რაციონალურებია

$b \in \mathbb{Q}$ ანუ

$f(q) = kq + b$ ხოლო ვიცით $f(f(y)) = y$ ანუ

$f(ky+b) = y$ ანუ $k(ky+b) + b = y$.

$k^2y + kb + b = y$

$b(k+1) = y(1-k^2)$

I შემთხვევა $1-k^2 \neq 0$ ანუ $k^2 \neq 1$ ანუ $k \neq \pm 1$ [illegible] $y = \frac{b(k+1)}{1-k^2}$

y [illegible] $\frac{b(k+1)}{1-k^2}$ [illegible] ანუ [illegible] ანუ $1-k^2=0$, ანუ $k^2=1$ ანუ $k=\pm1$ თუ $k=1$ ანუ $k+1=2$ ანუ $b=0$ ანუ მივიღებთ რომ $f(1)=1$ და $f(0)=0$ ანუ $f(q)=q$ ყოველი $q>0$-თვის [illegible] და II [illegible] არის თუ $k=-1$ [illegible].

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

30.04.2013/ მათ/III/242

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

ანუ როდესაც $k=-1$ მაშინ გვაქვს $f(x)=-x+b$ ~~და როცა~~. ანუ
ანუ გვაქვს ორი ვარიანტი როდესაც $x\geq 0$ $f(x)=-x+b$ სადაც $f(b)\geq 0$
ან $f(x)=x$
ჩავსვათ $f(x)=x$

$x+y+z=x+y+z$ მაშინ აქვე ანუ $f(x)=x$ გვაქვს.
ახლა ჩავსვათ. $f(x)=-x+b$.

$f(x+f(y+f(z)))=f(x+f(y-z+b))=f(x-y+z-b+b)=$
$=f(x+z-y)=y-x-z+b=y+f(x+z)$ მაშინ
$f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$ ანუ გვაქვს ორივე ვარიანტი
$f(x)=-x+b$ ან $f(x)=x$ როცა $x\geq 0$
ახლა ვაჩვენოთ რომ $f(x+z)=f(x)+f(z)-f(0)$ ჩავსვათ $x=x$ და $z=-x$
ანუ $2f(0)-f(x)=f(-x)$ ~~...~~
თუ გვაქვს I შემთხვევა როცა ~~$f(x)\geq 0$~~ $x\geq 0$ $f(x)=x$ ანუ $b=0$ ანუ
$f(0)=0$ ანუ ამ შემთხვევაში გამოვა რომ $f(-x)=2\cdot 0-f(x)=-x$ ანუ
$f(-x)=-x$ ყოველი ნატურალურისთვის ანუ $f(q)=q$ ყოველი $q\in Q$-თვის
$f(x)=x$
ხოლო თუ გვაქვს $f(x)=-x+b \Rightarrow f(0)=b \Rightarrow 2f(0)-f(x)=f(-x)$
გამოვიყენებთ ეს $2f(0)-b+x=f(-x)$ ანუ $x+b=f(-x)$ ანუ
$f(-x)=x+b$ ანუ ყოველი q-სთვის $f(q)=-q+b$ როცა $q\in Q$
$f(x)=-x+b$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

30.04.2013/ მათ/III/ 242

ამოცანა № 3

გვერდი № 4

ანუ მივიღეთ რომ არის სულ ორი ვარიანტი ~~ყოველი q-სთვის~~ $f(q)=-q+b$ ~~ან~~ $f(q)=q$
ანუ ამ ფუნქციამ ასევე ორი ამონახსნი $f(q)=-q+b$ სადაც $b\in Q$
ნებისმიერი რიცხვია და $f(q)=q$ შევამოწმოთ ორივე
რომლებიც მე-3 გვერდზე ნაჩვენები ფუნქციებში იგივე იქნება და
მივიღებთ რომ ორივე აკმაყოფილებს ანუ პასუხია

I პასუხი $f(q)=-q+b$

II პასუხი $f(q)=q$

$q\in Q$.