შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11

30.04.2013/ მათ/III/237

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)$ სადაც მარცხენა მხარე იყოფა x^3-ზე, ამიტომ გამომდინარეობს, რომ მარჯვენა მხარეც იყოფა x^3-ზე; $(xyz+2)$ იყოფა x-ზე, მაშ 2 იყოფა x-ზე, იყოფა მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ თუ $x=2$ ან $x=1$, ხოლო 2012-ც არ იყოფა x^3-ზე (იყოფა მხოლოდ მაშინ, თუ $x=1$) ამიტომ გამომდინარეობს, რომ $x=2$ ან $x=1$; ავარჩიოთ პირველი შემთხვევა:

$8(y^3+z^3)=2012\cdot(2yz+2) \Rightarrow y^3+z^3=503\cdot(yz+1)$; $y^3+z^3=(y+z)(y^2-yz+z^2)$

ე.ი. $\cancel{y^3+z^3}$ $(y+z)(y^2-yz+z^2)=503(yz+1)$ ~~[illegible] რომ $y^2-yz+z^2 \geq yz+1$, საიდანაც~~

~~$y^2+z^2 \geq 2yz+1$ ხოლო ეს ადვილად ჩანს, რომ $y^2+z^2 \geq 2\sqrt{y^2z^2}=2yz$, ხოლო ტოლობა~~

~~მიიღწევა მაშინ თუ $y=z$, ხოლო [illegible], რომ $y\neq z$, საიდანაც~~

დავუშვათ, რომ $y\neq z$ მაშინ $y^2-yz+z^2 \geq yz+1$ საიდანაც $y^2+z^2 \geq 2yz+1$ $\cancel{2\sqrt{y^2z^2} \geq 2yz}$

$y^2+z^2 \geq 2\sqrt{y^2z^2} = 2yz$ ხოლო საიდანაც ეს ტოლობა მიიღწევა მაშინ, როცა $y=z$, ე.ი.

$y^2+z^2 \geq 2yz+1$ სრულდება; დავუშვათ $y+z=503$ და $y^2-yz+z^2=yz+1$ მაშინ ვიღებთ, რომ

$y^2-2yz+z^2-1=0$

$D=4z^2-4z^2+4=4$

$y=\frac{2z-2}{2}=z-1$

და $y=\frac{2z+2}{2}=z+1$ (რაც შეუძლებელია, სიმეტრიის გამო)

ე.ი. $y=z-1$ და $y+z=503$ აქედან $y=251$ და $z=252$, რაც სავსებით აკმაყოფილებს, დადებითი რიცხვებს;

ახლა, ვაჩვენოთ $y^2-yz+z^2=503$ და $y+z=yz+1$, ამიდან გამომდინარეობს რომ $yz-z=y-1$

$z(y-1)=y-1$

$z=1$ რაც შეუძლებელია

ე.ი. ეს ვარიანტი არ გვაწყობს; თუ

თუ $y=z$, მაშინ $2y\cdot(y^2-y^2+y^2)=503(y^2+1)$

$2y^3=503(y^2+1)$ $2y^2 \geq y^2+1$ ე.ი. y უნდა იყოს 503-ის ტოლი

მაგრამ მაშინ არ მიიღება ტოლობა.

ახლა დავუშვათ ის ვარიანტი, როცა $y^2-yz+z^2=503k$ სადაც $k>1$ და $(y+z)k=yz+1$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11

30.04.2013/ მათ/III/237

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $x=1$, მაშინ $y^3+z^3=2012\cdot(yz+2)$; [illegible] 4-ზე, [illegible] 4-ზე, [illegible] y და z ლუწი რიცხვები, [illegible] 2-ზე [illegible] 8-ზე: $y_1^3+z_1^3=503(y_1z_1+1)$ [illegible]

[illegible] $(y+z)k=yz+1$ და $(y^2-yz+z^2)=503k$ [illegible], რომ $y=\frac{z-\sqrt{2012-3z^2}}{2}$ [illegible]

$$\left(-3z-\sqrt{2012k-3z^2}\right)k=z^2-z\sqrt{2012k-3z^2}+2$$

$$\left(9z^2-2012k-3z^2-6z\sqrt{2012k-3z^2}\right)k^2=z^4-2012z^2k+3z^4-2z^3\sqrt{2012k-3z^2}+4+$$

$$+2\left(2z^2-2z\sqrt{2012k-3z^2}\right)$$

[illegible] $x=2$, $y=251$ და $z=252$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

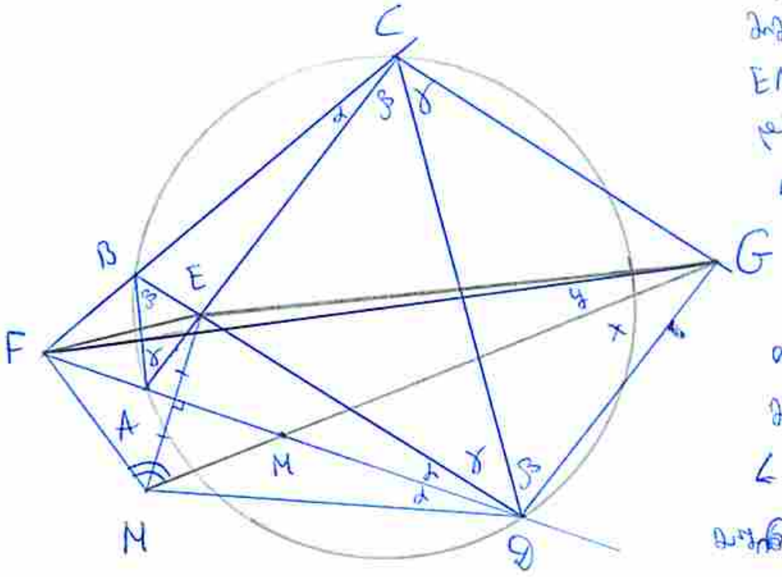
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11

30.04.2013/ მათ/III/ 237

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



$\angle BCA \equiv \alpha$, მაშინ $\angle BDA = \alpha$, ხოლო ჩავთვალოთ H არის E-ს სიმეტრიული AD-ს მიმართ, აქედან გამომდინარეობს, რომ $EA = AH$ და $EH \perp AD$, ე.ი. $ED = HD$ და $\angle ADH = \angle EDA = \alpha$

$\angle CDG \equiv \beta$, ჩავთვალოთ $\square CEDG$ ჩახაზული ოთხკუთხედია, ე.ი. $\angle ECD = \beta$ და $\square BADC$-დან $\angle ABD = \beta$

აქ დავამტკიცებთ, რომ $\angle FGH = \alpha$ მაშინ $\square FGDH$ იქნება ციკლური.

$\angle FGM \equiv y$ და $\angle GMD \equiv x$

მაშინ $\dfrac{FM}{MD} = \dfrac{FG}{GD} \cdot \dfrac{\sin y}{\sin x}$

$\triangle FMD$-დან $\dfrac{FM}{MD} = \dfrac{FH}{HD} \cdot \dfrac{\sin))}{\sin(2\alpha+\gamma+\beta)}$; $FE = FH$; ხოლო $HD = DE$

~~[illegible]~~

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11

30.04.2013/ მათ/III/ 237

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$ ჩავსვათ x-ში $y=0$ და $z=0$

$f(x+f(f(0)))=f(x)$; ჩავსვათ x, y, z ნაცვლად 0; მივიღებთ

$f(f(f(0)))=f(0)$ ახლა ჩავსვათ $x=0$ $y=0$ და z

$f(f(f(z)))=f(z)$