შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

30.04.2013/ მათ/III/ 234

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x \le y \le z \qquad x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)$

$2012=2\cdot 2\cdot 503$, 503 მარტივი რიცხვია

$503=8^3-2^3-1=8^3-3^2$

1) $x=1$

$y^3+z^3=2012(yz+2) \qquad z\ge y\ge 1$

2) $x=2$

$y^3+z^3=503(yz+1) \qquad z\ge y\ge 2$

3) $x=2k+1 \quad (k\in N)$.

$\text{უსგ}(x^3, xyz+2)=1 \Rightarrow 2012 \,\vdots\, x^3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow k=0$ (დავუშვით რომ, რომ $k\in N$) ანუ ასეთი $x$-ები არ აკმაყოფილებს.

4) $x=2(k+1) \quad (k\in N)$

$8(k+1)^3(y^3+z^3)=4\cdot 503(2(k+1)yz+2)$

$(k+1)^3(y^3+z^3)=503(yz(k+1)+1)$

$\text{უსგ}((k+1)^3, yz(k+1)+1)=1 \Rightarrow 503 \,\vdots\, (k+1)^3 \Rightarrow (k+1)=1 \Rightarrow k=0$

ასეთი $k$ ვერ იარსებებს. ანუ განვიხილოთ მხოლოდ პირველი და მეორე შემთხვევები.

$y^3+z^3=503(yz+1)$

$\begin{cases} y=pk \\ z=qk \end{cases} \qquad k=(p,q)$.

$(p^3+q^3)k^3=503(pqk^2+1)$

$(k^3; pqk^2+1)=1 \Rightarrow 503 \,\vdots\, k^3 \Rightarrow k=1 \Rightarrow \underline{(y,z)=1}$

$(y+z)(y^2-yz+z^2)=503(yz+1)$

1) $y=z-1$

$(2y+1)(\cancel{y^2}-\cancel{y^2}-\cancel{y}+\cancel{y^2+2y}+1)=503(\cancel{y^2+y+1})$

$2y+1=503 \qquad \boxed{y=251 \qquad z=252 \qquad x=2}$ ეს ერთი ამონახსნია.

თუ დავუშვებთ იმას რომ [illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

30.04.2013/ მათ/III/ 234

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

2) $y < z-1 \;\Big|\Rightarrow (z-y)^2 > 1 \Rightarrow z^2 - yz + y^2 > yz+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y+z < 503$.

$y+z \geq 4 \Rightarrow 503 \not\vdots\; y+z \Rightarrow \begin{cases} yz+1 \;\vdots\; y+z \\ y^2 - yz + z^2 \;\vdots\; 503 \end{cases}$

$yz+1 \;\vdots\; y+z \;\Big|\Rightarrow (y-1)(z-1) \;\vdots\; y+z$

$(y+1)(z+1) \;\vdots\; y+z \;\Big|\Rightarrow (y-1, y+z) > 1 \quad (z-1; y+z) > 1$

$(y+1; y+z) > 1 \quad (z+1; y+z) > 1$

$y+z \overset{?}{\vdots}\, 503 \quad z-y \;\vdots\; 503 \;\Big|\Rightarrow z^2 - y^2 \not\vdots\; 503$

$y^3 + z^3 = 2012(yz+2)$

$\begin{cases} y = pk \\ z = qk \end{cases} \quad (y,z) = k$

$(p^3+q^3)k^3 = 4 \cdot 503(pqk^2+2)$

$(k^3, pqk^2+2) = 1; 2;$

1) $y^3 + z^3 = 2012(yz+2) \quad (y,z) = 1$

3) $p^3 + q^3 = 503(pq \cdot 2 + 1) \quad (p,q) = 1$

საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ $z^2 - yz + y^2 \not\vdots\; 503$, მე და [illegible]
[illegible].

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

30.04.2013/ მათ/III/ 234

ამოცანა № 1

გვერდი № 3

თუ $C=0$

$f(-x)=-f(x)$

$f(x+y)=f(x)+f(y)$

$f(f(x))=x.$

$f(x+f(y+f(z)))=f(x)+y+f(z)=y+f(x)+f(z)$

$f(0)=0.$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

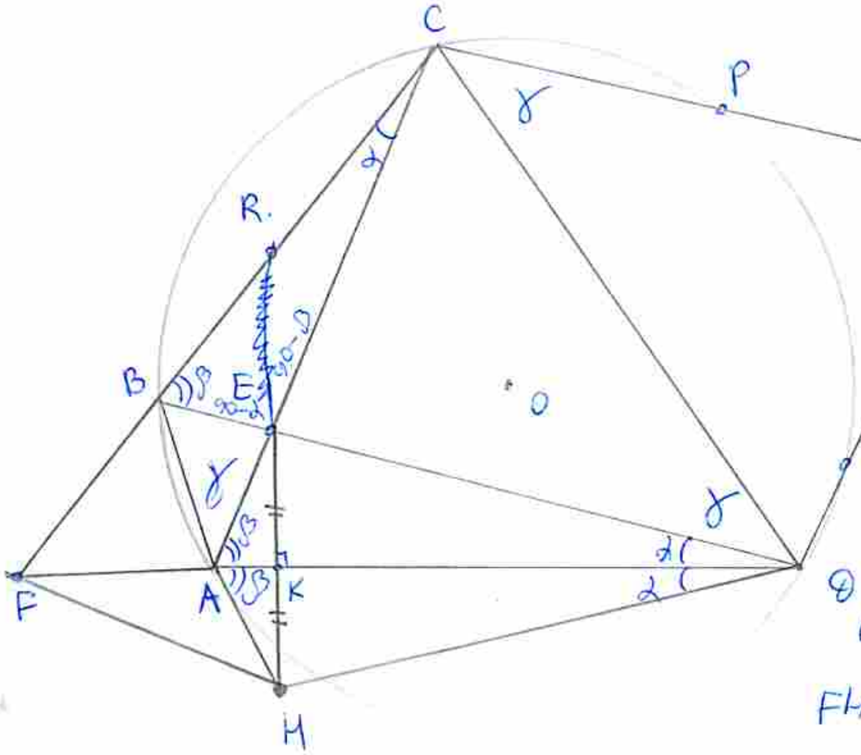
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

30.04.2013/ მათ/III/ 234

ამოცანა № 2

გვერდი № 1




$EK = KH$

$EK \perp AK$.

$\angle FCA = \angle B\Theta A = \angle A\Theta H$

$\angle CB\Theta = \angle CA\Theta = \angle \Theta AH$

$\square CP\Theta B$ და $\square Q\Theta AC$ [illegible]

$\angle GC\Theta = \angle C\Theta E$

$\angle EC\Theta = \angle C\Theta G$.

[illegible] $\Theta$ [illegible]

$FH \cdot G\Theta + H\Theta \cdot FG = F\Theta \cdot HG$

$FH = FE$

$H\Theta = \Theta E$

$F\Theta = \dfrac{FB \cdot FC}{FA}$

$G\Theta = CE = \dfrac{BE \cdot E\Theta}{AE}$

$\angle BAC = \angle \Theta CG = \angle C\Theta B$

$\triangle BEC$ и $\triangle AE\Theta = \triangle AH\Theta$

$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{P\Theta}$ [illegible] $CP \parallel B\Theta$

$\overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{B\Theta}$ [illegible] $Q\Theta \parallel BC$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

30.04.2013/ მათ/III/ 234

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$f(x+f(y+f(z))) = y+f(x+z).$

$f(0) \equiv c.$

$\begin{cases} z=0 \\ y=-c \end{cases}$ $f(x+f(-c+c)) = -c+f(x)$

$\boxed{f(x+c) = -c+f(x)} \Rightarrow x=0 \to \underline{f(c)=0} \quad |\Rightarrow \underline{f(f(0))=0}$

$\begin{cases} y=c \\ z=c \end{cases}$ $f(x+f(c+f(c))) = c+f(x+c)$

$f(x) = c+f(x+c)$

$y = c-f(z)$

$f(x+\underset{0}{f(c)}) = c-f(z)+f(x+z)$

$f(x) = c-f(z)+f(x+z)$

$\underline{f(x+z) = f(x)+f(z)-c} \qquad (1)$

$z=c.$

$f(x+f(y+\overset{0}{f(c)})) = y+f(x+c)$

$f(x+f(y)) = y+f(x+c) = y+f(x)+\overset{0}{f(c)}-c = y+f(x)-c$

$f(x+f(y)) = f(x)+f(f(y))-c$ (1)-ის გამოყენებით

$f(x)+f(f(y))-c = y+f(x)-c \quad |\Rightarrow \underline{f(f(y))=y}$

$\begin{cases} y=f(-x) \\ z=c \end{cases}$

$f(x+f(f(-x)+\overset{0}{f(c)})) = f(-x)+f(x+c)$

$f(x-x) = f(-x)+f(x)-c$

$\underline{f(-x)+f(x) = 2c}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

30.04.2013/ მათ/III/ 234

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

ეს ვაჩვენეთ, რომ როცა $x \in [0;c]$ მაშინ $f(x)=-x+c$; მაშინ $\forall x \in \mathbb{Q}$
საჭიროა $f(x)=-x+c$ გამომდინარე $f(x+c)=f(x)-c$ აქედან. დამტკიცება:
$f(x+tc)=f(x+(t-1)c)-c=\dots=f(x)-tc=-x+c-tc=$
$=\underbrace{-x-tc}+c$. ე.ი. $x$ ავიღოთ $[0;c]$-ში და $x+tc$ არის ის შუალედი, რომელსაც დავამტკიცებთ, რომ $f(x)=-x+c$. $t\in\mathbb{Z}$.
ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\forall x\in[0;c]$ $x\in\mathbb{Q}$ $f(x)=-x+c$.
განვიხილოთ $\forall x\in[0;c]$ $x\in\mathbb{Q}$ და ვაჩვენოთ ეს ყოველი $x$-ისთვის, რომ $f(x)=-x+c$

~~[illegible]~~

ვავიღოთ სეგმენტი $l, r$. მივიღებთ $x$ რომელიც არის $\frac{l+r}{2}$ ან
$x$ იყოს $[l;\frac{l+r}{2}]$-ში მარცხენა ნაწილში, ან თუ მარჯვენა $([\frac{l+r}{2};r])$
და ყოველ ჯერზე ეს ვიცით $(l;r)$-ში ვიცით, რომ $f(l)=-l+c$, $f(r)=-r+c$
თავიდან $l=0$ $r=c$ $f(l)=-l+c$ $f(r)=-r+c$. ეს ვაჩვენოთ, რომ $f(\frac{l+r}{2})=$
$=\frac{-l-r}{2}+c$. მაშინ ეს გავაგრძელოთ ბევრჯერ და $x$ მივუახლოვდებით ყოველთვის და ამით დავამტკიცებთ, რომ $x$-ისთვის სწორია. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $(l;r)$-სთვის ეს სწორია $f(l)=-l+c$ და $f(r)=-r+c$. მაშინ $f(\frac{l+r}{2})=\frac{-l-r}{2}+c$.

$f(x+y)=f(x)+f(y)-c$
$f(\frac{l}{2}+\frac{l}{2})=2f(\frac{l}{2})-c$
$2f(\frac{l}{2})=-l+c+c=-l+2c$
$f(\frac{l}{2})=-\frac{l}{2}+c$ ასევე ანალოგიურად $f(\frac{r}{2})=-\frac{r}{2}+c$.
$f(\frac{l+r}{2})=f(\frac{l}{2})+f(\frac{r}{2})-c=-\frac{r}{2}+c-\frac{l}{2}+c-c=\frac{-l-r}{2}+c$. ანუ ვარაუდი დამტკიცდა. ეს გავაგრძელოთ. $x$ მივუახლოვდებით უსასრულოდ და $f(x)$-ის გახდება $-x+c$.
ანუ $f(x)=-x+c$ $\boxed{c\in\mathbb{Q}}$ ნებისმიერი $c$-სთვის. შევამოწმოთ პირობა:
$\cancel{-x}-f(y+f(z))+\cancel{c}=y\cancel{-x}-z+\cancel{c}$
$f(y+f(z))=z-y$
$\cancel{-y}-f(z)+c=z\cancel{-y}$
$f(z)=c-z$ $\quad -z+c=-z+c$. ს.ბ.დ.

პასუხი: $\boxed{f(x)=-x+c \quad c\in\mathbb{Q}}$