შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

30.04.2013/ მათ/III/ 227

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)=2^2\cdot 503(xyz+2)$

მარჯვენა მხარე იყოფა 503-ზე. ანუ ან $(x^3 \vdots 503)$ ან

$(y^3+z^3)\vdots 503$. თუ $(x^3 \vdots 503)$ რადგან 503 მარტივია

$(x \vdots 503)$. მაშინ მარჯვენა მხარე გაიყოფა (503^3) მარცხე-

ნა კი ~~(503-ზე)~~ რადგან $(xyz+2)$ არ გაიყოფა 503-ზე,

ანუ გამოდის $x \not\vdots 503$ და $(y^3+z^3)\vdots 503$. მარჯვენა

მხარე იყოფა x-ზე. მარცხენა მხარე კი ტოლია

$2012\cdot xyz+2^3\cdot 503$ ანუ $(2^3\cdot 503)\vdots x$. რადგან x 503-ზე

არ იყოფა დარჩა შემთხვევები $x=1$; $x=2$; $x=2^2$ ან

$x=2^3$. თუ $x=2^2$ მაშინ გვაქვს

$2^6(x^3+y^3)=2^2\cdot 503(2^2\cdot yz+2)$

$2^3(x^3+y^3)=503(2yz+1)$. ეს შეუძლებელია რადგან

მარცხენა მხარე ლუწია. ანალოგიურად განიხილება შემ-

თხვევა როცა $x=2^3$ და მივიღებთ რომ ეს შემთხვევაც

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

30.04.2013/ მათ/III/ 227

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

არ ვარგა. დავუშვათ $x=1$ ან $x=2$.
თუ $x=1$ გვაქვს

$$y^3+z^3=503\cdot 2^2(yz+2).$$

თუ $x=2$.

$$y^3+z^3=503(yz+1).$$

ასევე შევნიშნოთ რომ მარცხენა მხარე ორივე შემთხვევაში იყოფა 503-ზე.

$(y^3+z^3)=((y+z)(y^2+z^2-yz))\ \vdots\ 503$. არის 2 შემთხვევა $(y+z)\ \vdots\ 503$-ზე ან $(y^2+z^2-yz)\ \vdots\ 503$.
თუ $(y+z)\ \vdots\ 503$, მაშინ $y+z\geq 503 \Rightarrow z\geq 252$.
ცხადია ეს არ ვარგა რადგან $z^3\geq 252^3$. და ასევე ან $z^3\geq y^3$. ანუ $z^3+y^3\geq 503\cdot 2^2(yz+2)\geq$

$$\geq 503(yz+1).$$

ე.ი. შემთხვევა როცა $(y+z)\ \vdots\ 503$-ზე არ ვარგა. რჩება $(y^2+z^2-yz)\ \vdots\ 503$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

30.04.2013/ მათ/III/ 227

ამოცანა № 1

გვერდი № 3

როგორც განხილვის შემდეგ დამტკიცებულია რომ
მხ ის გარდა ამონახსნი.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

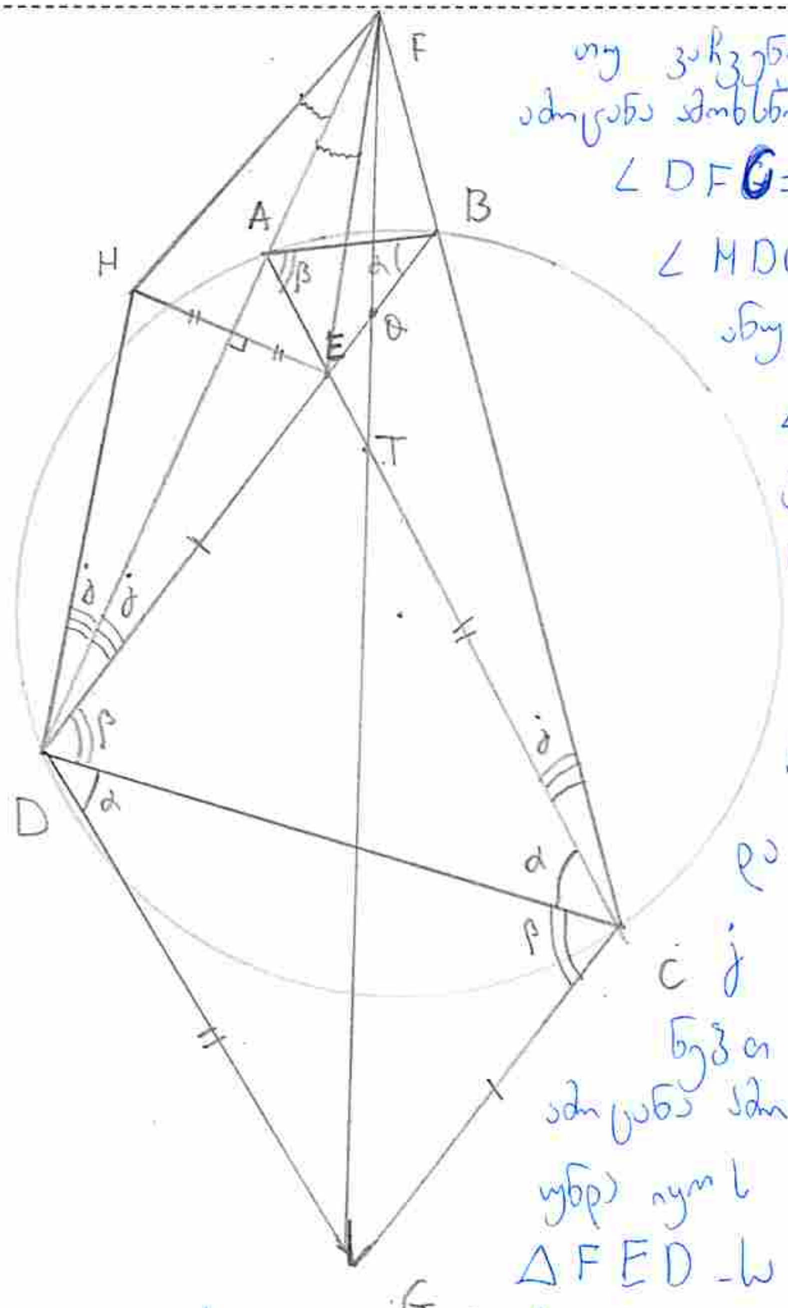
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

30.04.2013/ მათ/III/227

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



თუ ვაჩვენებთ რომ $\angle MDG + \angle MFG = 180^\circ$ ამოცანა ამოხსნილია. ჩვენ ვიცით რომ $\angle DFG = 180 - 2\gamma - \alpha - \beta$ ხოლო $\angle MDG = 2\gamma + \alpha + \beta$. ანუ უნდა დავამტკიცოთ $\angle MFG = \angle DFE$. ეს კი ტოლფასია დავამტკიცოთ რომ $\angle MFD = \angle GFC$. ხოლო $\angle MFD = \angle DFE$. რადგან $\triangle FDE$-ს და $\triangle FCT$-ს კუთხე γ ტოლი აქვთ თუ ვაჩვენებთ რომ $\angle FED = \angle FTC$ ამოცანა ამოხსნილია. ანუ $\angle FEB$ ტოლი უნდა იყოს $\angle FTA$-ს. $\triangle FED$-ს და $\triangle FCT$-ს რადგან საერთო კუთხე აქვთ ვაჩვენოთ რომ $\frac{FD}{FC} = \frac{DE}{TC}$ (1) ამის შემდეგ მსგავსების ორი-ორი ნიშნის თანახმად $\triangle FED \sim \triangle FTC$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

30.04.2013/ მათ/III/227

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

ანუ $\angle DFE$-ს ცენტრი იქნება $\angle TFC$-ს.

საიდან ~~$\Delta EQT \sim \Delta CGT$~~ $\Delta GCT \sim \Delta QDG$ გვაქვს

$$\frac{TC}{DG} = \frac{GC}{DQ} = \frac{DE}{DQ}.$$

ანუ $\dfrac{DE}{TC} = \dfrac{DQ}{DG}$.

ჩავსვათ (1)-ში, დასამტკიცებელი გვაქვს

$\dfrac{DQ}{DG} = \dfrac{FD}{FC}$. საიდან $\Delta DBF \sim \Delta CAF$

გვაქვს $\dfrac{FD}{FC} = \dfrac{BD}{AC}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

30.04.2013/ მათ/III/ 227

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

ჯერ ვაჩვენოთ ჩემი ვარგა, რომ თუ $f(f(f(x)))=f(x)$ და $f(x)$ ზრდადია მაშინ ტოლობა $f(f(f(x)))=f(x)$ ეკვ. ტოლობის $f(x)=x$. დავუშვათ $f(x)=a$.
$f(f(a))=a$. თუ $f(a)>a$ მაშინ ხდება ფუნქცია ზრდადია $f(f(a))>f(a)>a$ ანუ ტოლობა არ სრულდება. თუ $f(a)<a$ მაშინ
$f(f(a))<f(a)<a$. ესე იგი ერთადერთი შესაძლებელია $f(a)=a$. ახლა მოცემულ ფუნქციაში ჩავსვათ $y=0$ და $x=0$. მივიღებთ: $f(f(f(z)))=f(z)$. თუ $f(z)$ ზრდადია ამოცანა ამოხსნილია. ანუ უნდა ვაჩვენოთ რომ $f(x+t)>f(x)$ $(t>0)$.
ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში $z=0$.
$f(x+f(y+f(0)))=y+f(x)$. თუ $y>0$ მაშინ
$y+f(x)>f(x)$
ანუ თუ მივიღებთ რომ დადებითი y რომელისთვისაც

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

30.04.2013/ მათ/III/227

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

$f(y+f(0)) > 0$ ამიტომ არის ნ/ნული.

ავიღოთ ეგ ჩასმა $z=-x$ და $y=0$.

გვაქვს $f(x+f(f(-x)))=f(0)$.

ცხადია იქიდან $y>0$ რომ $f(y+f(0))$ მონოტონური

ანუ ვერ/ცა მკაცრი ზრდა. ე.ი. $f(x)\equiv x$.