SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

30.04.2013/ მათ/III/224

ამოცანა № 1

გვერდი № 1(2)

$x \le y \le z \qquad x^3(y^3+z^3) = 2012(xyz+2)$

$x^3(y^3+z^3) = 2012xyz + 4024$

ცხადია $x^3 \vdots x$; $2012xyz \vdots x \Rightarrow 4024 \vdots x$ დავუშვათ $x = 8k$

მაშინ $x^2(y^3+z^3) = 2012yz + \frac{503}{k}$ $x^2(y^3+z^3)$ − მთელია, $2012xyz$ − მთელია

ხოლო $\frac{503}{k}$ − არამთელი რაც არის შეუძლებელი ანუ $x \ne 8k$ $x \ne 4024$. ე.ი.

x არის ასევე 2012-ის გამყოფი მაშინ $x^3(y^3+z^3) \vdots x^2$; $2012xyz \vdots x^2$

$\Rightarrow 4024 \vdots x^2$ $4024 = 2^3 \cdot 503$ ე.ი. $x^2 = 4$ $x = 2$

$8(y^3+z^3) = 2012 \cdot 2 \cdot yz + 4024$

$y^3+z^3 = 503yz + 503$

$(y+z)(y^2+z^2-yz) = 503yz + 503$

$(y+z)(y^2+z^2-yz) = 503(yz+1)$

ცხადია 503 მარტივია ან $y+z \vdots 503$ ან $y^2+z^2-yz \vdots 503$.

დავუშვათ $y+z=503$ მაშინ $y^2+z^2-yz = yz+1$ $(y-z)^2 = 1$ $y=251$ $z=252$

და ამონახსნია $x=2$ $y=251$ $z=252$ თუ $y+z \ne 503$ მაშინ $y+z > 503$

და $y^2+z^2-yz \ge yz+1$ ცხადია $z>y$ და მთელებია და $(y-z)^2 \ge 1$ რაც

ეწინააღმდეგება ე.ი. თუ $y+z \vdots 503$ მაშინ $y+z=503$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

30.04.2013/ მათ/III/ 224

ამოცანა № 1

გვერდი № 2(2)

ახლა იქნება $y^2+z^2-yz \vdots 503$ და $y^2+z^2-yz=k503$.

ხოლო $y+z=\frac{yz+1}{k}$ სადაც k მთელია და $\frac{yz+1}{k}$-ც მთელია. ხოლოდ

მეორე განტოლებიდან გამოვსახავთ y-ს და ჩავსვამთ I-ში მივიღებთ განტოლებას.

$ky+kz=yz+1$

$y=\frac{1-kz}{k-z}$ ხოლო $z^2-\frac{1-kz}{k-z}\cdot z+\left(\frac{1-kz}{k-z}\right)^2=k503$ ეს

განტოლებას მთელი ამონახსნები არ აქვს. და ერთადერთი ამონახსნი

იქნება $x=2$ $y=251$ $z=252$

ანუ $y^2+z^2-yz\geq 503$ ხოლო $y^2+z^2-yz>zy+1$ -ზე და

$y+z\geq yz+1$ ანუ ვამრავლებ ორს $(y^2+z^2-yz)(y+z)\geq 503(zy+1)$

და ტოლობა სრულდება მაშინ როდესაც $y^2+z^2-yz=503$ და

$y+z=yz+1$

$$\begin{cases} y+z=yz+1 \\ y^2+z^2-yz=503 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1-z}{1-z}=1 \quad (z>y). \\ z^2-z=502 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=\frac{1\pm\sqrt{2009}}{2} \end{cases}$$ და y და z

რაც მივიღეთ არ აკმაყოფილებს ე.ი. ერთადერთი ამონახსნი

არის $x=2$ $y=251$ $z=252$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

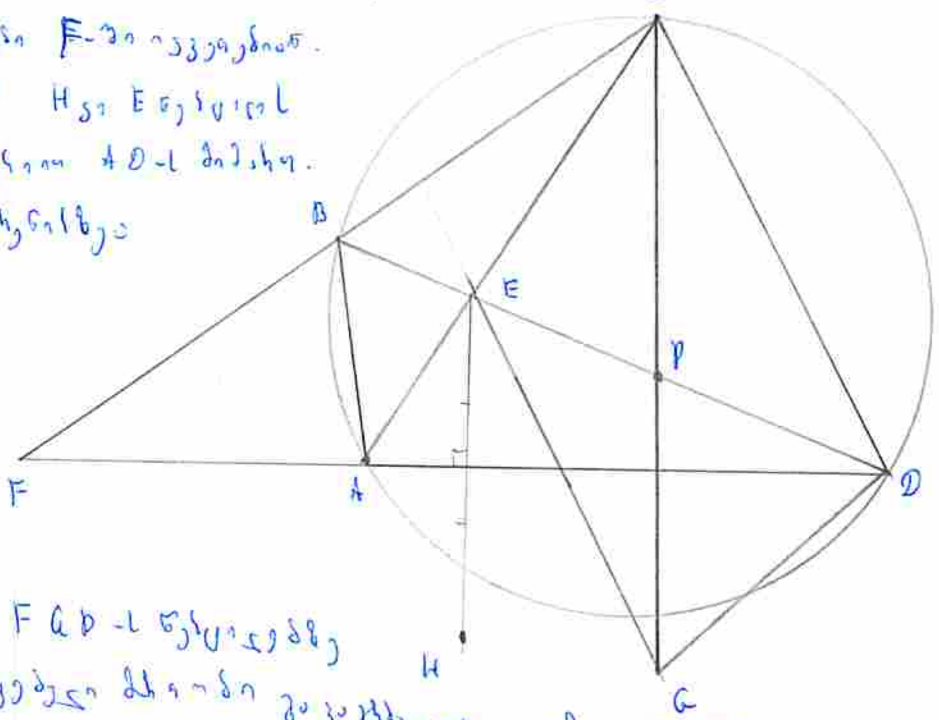
მაგიდა № 6

30.04.2013/ მათ/III/ 224

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

მოც: ABCD ჩახაზული ოთხკუთხედი. დიაგონალების კვეთა E
AD და BC გაგრძელებები F-ში იკვეთებიან.
ECGD პარალელოგრამია H არის E წერტილის
ანასახი ღერძული სიმეტრიით AD-ს მიმართ.
დ.დ. D;H;F;G; ერთ წრეზეა



ავაგოთ წრეწირი △FGD-ს წვეროებზე
და E-დან AD-ზე დაშვებული მართობი გავაგრძელოთ ამ წრეწირის
გადაკვეთამდე და დავამტკიცოთ რომ ეს იქნება H წერტილი.

შევაერთოთ CG და ED. რადგან პარალელოგრამია EP=PD და CP=PG

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

30.04.2013/ მათ/III/224

ამოცანა № 3

გვერდი № 1(2)

$f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$ ჩავსვათ $x=0$ $y=y$ და $z=0$

$f(0+f(y+f(0)))=y+f(0)$

$f(f(y+f(0))=y+f(0)$ $f(0)=a$

$f(f(y+a))=y+a$ $y+a$-მ მიიღებს ყველა მნიშვნელობას ამიტომ ვამოწმოთ რომ $f(f(x)=x$ და $f(x)=f(y)\Rightarrow$ $f(f(x)=$

$=f(f(y)\Rightarrow x=y$ ე.ი. $f(a)=0$

ჩავსვათ $x=-a$ $y=a$ და $z=a$. მაშინ·

$f(-a+f(a+f(a)))=a+f(0)=2a$

$f(-a)=2a=2f(0)$. $\Rightarrow f(2a)=-a$ (რადგან $f(f(x)=x$).

ჩავსვათ $x=a$ $y=a$ $z=-a$ მაშინ:

$f(a+f(a+f(-a)))=a+f(0)=2a=2f(0)$ $f(-a)=2a$

$f(a+f(3a))=2a$

$f(f(a+f(3a))=f(2a)=a+f(3a)=-a$

$f(3a)=-2a$ $-2a=2f(2a)$

$f(3a)=2f(2a)$

$3a=4a$ ე.ი. $a=0$ $f(0)=0$

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

30.04.2013/ მათ/III/ 224

ამოცანა № 3

გვერდი № 2(2)

$f(x+f(y+f(z))) = y + f(x+z)$

ჩავსვათ $x=x$ $y=x$ და $z=0$.

$f(x+f(x)) = x + f(x)$ $\quad x+f(x) \equiv a$

$f(a) = a$

ე.ი. ისეთი $f: Q \to Q$ ფუნქცია რომელიც აკმაყოფილებს $f(x+f(y+f z))) = y + f(x+z)$

$f(x) = x$.