

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი  
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო  
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

30.04.2013/ მათ/III/215

ამოცანა №

1

გვერდი №

1

შევნიშნოთ  $h = 4024 : X$ . თუ  $X : 503$ , მაშინ  
 $2012(Xyz+2) : 503^3$  ანუ  $Xyz+2 : 503^2$ , და  $X : 503$   
 ანუ  $2 : 503^2$ . ხაც ახსნოხა ანუ  $X$  ახ იყოფა  $503$ -ზე  
 $X = 2$  ან  $X = 4$  ან  $X = 8$  ან  $X = 1$ .  $X$  ახ ახს მუცტი 2-ზე  
 ხაღვან შეკვეთის შემდეგ მაჩვენებელი მხაიე ანტი ხრედა  
 მახსებნა ან რეზი.  $X = 1$  ან  $X = 2$ .

$$5) \quad y^3 + z^3 = 2012(yz + 2) \quad 6) \quad 8(y^3 + z^3) = 2012(2yz + 2)$$

$$y^3 + z^3 = 503(yz + 1)$$

$$6) \quad yz + 1 : y^3 + z^3 \quad \text{ანუ} \quad yz + 1 : y^2 + yz + z^2 \text{ მუციათ}$$

$$y^2 + yz + z^2 > yz + 1 \quad \text{ანუ}$$

"~~ა~~" ~~უახიანდა შექცეულია.~~

$$y^2 + yz + z^2 = 503 \quad \text{და} \quad yz + 1 : yz$$

$$y^2 + yz + z^2 - 503 = 0$$

~~აა ახაღვანი ვანტოვანს~~

$$z^2 - 4(z^2 - 503)$$

$$D = 2012 - 3z^2$$



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი  
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო  
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

30.04.2013/ მათ/III/215

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x^3(y^3+z^3) = 2012(xyz+2)$  შევნიშნოთ, რომ  $4024 : x$   
 თუ  $x : 503$  მაშინ  $2012(xyz+2) \equiv 503^3$  ანუ  $xyz+2 \equiv 503^2$   
 ხოც შეუძლებელია ანუ  $x \not\equiv 503$   $x=2$ , ან  $4$ , ან  $8$ , ან  $1$ .  
 $x$  ან  $x$ ის მეტი  $2$ -ზე უფრო; შევავსოს შემდეგ მახსენა  
 მხატვ ბენტი ჩრება მახსენა, ხი ებნი ანუ  $x=2$  ან  $x=1$   
 $8(y^3+z^3) = 2012(2yz+2)$   
 5)  $y^3+z^3 = 503(yz+1)$  ან 6)  $y^3+z^3 = 2012(yz+2)$  ( $x=1$ )  
 5) თუ  $(y; z) = d$  მაშინ  $503 : d$  ხოც შეუძლებელია  $(y; z) \equiv 1$   
~~ფორმალა~~  ~~$z \geq y$~~   ~~$z > 503$~~  მაშინ მახსენა  
 მხატვ მხატვარ მეტია მხსენა ანუ  $z < 503$ .  
 $yz+1 : y^2+y+z^2$  მაგჩამ  $yz+1 < y^2+y+z^2$   
 ანუ 5) ვახიანტი შეუძლებელია  
 6)  $y^3+z^3 = 2012(yz+2)$  ანალოგიურად მივიღებთ  
 რომ ვხეც შეუძლებელია ანუ  $x; y; z$  ან  $x$ ის სერობს.



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი  
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო  
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

30.04.2013/ მათ/III/215

ამოცანა №

1

გვერდი №

1

აღვნიშნოთ  $y = x + a$   
 $z = x + b$

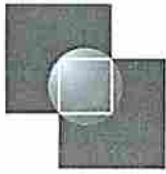
$$x^3 \left( (x+a)^3 + (x+b)^3 \right) = 2012 \left( x(x+a)(x+b) + 2 \right)$$

$$x^3 \left( 2x^3 + 3x^2(a+b) + 3x(a^2+b^2) + a^3 + b^3 \right) = 2012 \left[ x(x^2 + x(a+b) + ab) + 2 \right]$$

$$y^3 = k z^3 + 503 \sqrt{1 + k z^3} = 503^3 \sqrt{k^2 + 503^2} \cdot 2 + y^3$$

$$k z + z^3 = 503^3 \cdot z$$

$$k + z^2 = 503^3 \cdot \sqrt{k^2 + 503^2}$$



მაგიდა № 3

30.04.2013/ მათ/III/215

ამოცანა № 3

გვერდი №

1

I) ჩავსვით  $x=0$   $y=0$   $z=0$

$$f(f(f(0))) = f(0) \quad f(0) = a$$

$$f(f(a)) = a$$

~~$$f(f(0)) = 0$$~~

ii)  $x \cdot y = -f(z)$

$$f(x + f(0)) = -f(z) + f(x + z)$$

$$z = 0$$

$$f(x + f(0)) = f(0) - f(x)$$

შედეგი I

~~$$f(f(0)) = 0$$~~

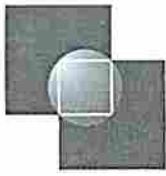
iii)  $x = -z$ ;  $y = -f(z)$

$$f(-z + f(0)) = -f(z) + f(0)$$

$$f(f(0) - z) = f(0) - f(z)$$

ii და iii ზვანობით:  $f(x + f(0)) = f(-x + f(0))$

შედეგი II  $f(x + f(0)) = f(-x + f(0))$



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი  
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო  
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

30.04.2013/ მათ/III/215

ამოცანა № 3

ბჰერდი № 2

IV)  $x=0$   ~~$y=$~~

$$f(x + f(y + f(0))) = y + f(x) \quad (\text{შედეგ II}) \quad f(y + f(0)) = f(-y + f(0)) \quad (\text{შედეგ I})$$

$$f(x + f(-y + f(0))) = y + f(x) \quad y = f(0)$$

$$f(x + f(0)) = f(x) + f(0)$$

$$(\text{შედეგ I}) \quad f(x + f(0)) = f(0) - f(x) \quad \text{ან } y$$

$$f(0) - f(x) = f(0) + f(x)$$

$$f(x) = 0$$