შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

30.04.2013/ მათ/III/ 206

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)$ სადაც $(a,b) \equiv (a,b)$.

$2012 \vdots 503$ - მარტივია. LHS-იც უნდა იყოფოდეს.

ვთქვათ $x \vdots 503 \Rightarrow LHS \vdots 503^3 \Rightarrow (xyz+2) \vdots 503^2 \vdots 503 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \vdots 503$ რაც შეუძლებელია. $\Rightarrow (x,503)=1$.

ანუ: $4(xyz+2) \vdots x^3$

ვთქვათ: $\left.\begin{array}{l} x \vdots p \\ (xyz+2) \vdots p \end{array}\right| \Rightarrow 2 \vdots p \Rightarrow \underline{x=2^k.\ k\in Z.\ k\geq 0.}$

ჩავსვათ, მივიღებთ:

$2^{3k}(y^3+z^3)=2012(2^k yz+2)$.

ვთქვათ $k>1$. მაშინ:

$2^{3(k-1)}(y^3+z^3)=503(2^{k-1}yz+1)$.

$k>1 \Rightarrow$ მარცხენა მხარე ლუწია, მარჯვენა კი - კენტი. რაც შეუძლებელია. ანუ $\underline{k=0 \text{ ან } k=1}$. $\Rightarrow x=1$ ან $x=2$.

<u>ლემა:</u> თუ $(a,b)=k$ და p - მარტივია $(k,p)=1$ და

$\left.\begin{array}{l} a^n-b^n \vdots p \\ a^m-b^m \vdots p \end{array}\right| \Rightarrow \left(a^{(n,m)}-b^{(n,m)}\right) \vdots p$.

ასევე ვიგულისხმოთ, რომ $p\in P$ და $a \not\vdots p$ და $b \not\vdots p$

დამტკიცება: ვთქვათ $n>m$. (ზოგადობის შეუზღუდავად).

$(a^n-b^n)-(a^m-b^m) \vdots p$, $a^m(a^{n-m}-1)-b^m(b^{n-m}-1) \vdots p$.

ვთქვათ $a^m \equiv b^m \equiv t \pmod p$. ცხადია $t \not\vdots p$, თუ კი მაშინ $a \vdots p$ და $b \vdots p$, ანუ $(a,b)=k \not\vdots p$, ანუ $(t,p)=1$. მაშინ გვაქვს

$t(a^{n-m}-1)-t(b^{n-m}-1) \vdots p \Rightarrow t(a^{n-m}-b^{n-m}) \vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^{n-m}-b^{n-m} \vdots p \\ a^m-b^m \vdots p \end{array}\right|$ თუ კი ამ პროცესს ზოგადად ვაგრძელებთ ევკლიდეს ალგორითმის მსგავსად მივიღებთ, რომ: $a^{(n,m)}-b^{(n,m)} \vdots p$. რაც და დამტკიცდა!

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

30.04.2013/ მათ/III/ 206

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

ა) ვთქვათ $k=1 \Rightarrow x=2$. მაშინ:

$y^3+z^3=503(yz+1)$. $(y+z)(y^2-yz+z^2)=503(yz+1)$.

თუ $y=z \Rightarrow 2y^3=503(y^2+1) \Rightarrow y \vdots 503 \Rightarrow y^2+1 \vdots 503$? რაც შეუძლებელია. $\Rightarrow |y-z| \geq 1 \Rightarrow (y-z)^2 \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2-yz+z^2 \geq yz+1 \Rightarrow \underline{y+z \leq 503}$.

$y^3+z^3 \vdots 503 \Rightarrow y^6-z^6 \vdots 503$.

თუ y და z-დან ერთ-ერთი იყოფა 503-ზე, მაშინ მეორეც იყოფა 503-ზე, თუმცა $(y,z)=1$-ია ან შეუძლებელია.

$(y,z)=1$, იმიტომ რომ თუ $(y,z)=k \Rightarrow k^3(y_1^3+z_1^3)=503(k^2y_1z_1+1)$;

$(k^2y_1z_1+1, k^3)=1 \Rightarrow 503 \vdots k^3 \Rightarrow k=1$.

ანუ $(y,z)=1$.

ფერმას მცირე თეორემით:

$y^{502}-1 \vdots 503$ და $z^{502}-1 \vdots 503 \Rightarrow y^{502}-z^{502} \vdots 503$.

ანუ: $\left.\begin{array}{l} y^6-z^6 \vdots 503 \\ y^{502}-z^{502} \vdots 503 \end{array}\right| \overset{\boxed{\text{ლემით}}}{\Rightarrow} y^{(6,502)}-z^{(6,502)} \vdots 503$ ანუ:

$y^2-z^2 \vdots 503 \Rightarrow z^2-y^2 \vdots 503$. ზოგადობის შეუზღუდავად $z \geq y$

$(z-y) < z+y \leq 503 \Rightarrow z+y \vdots 503 \Rightarrow z+y=503$. ანუ:

$y^2-yz+z^2=yz+1 \Rightarrow (z-y)^2=1 \Rightarrow z-y=1$ ($z \geq y$).

ანუ $y=251$ და $z=252$. ანუ $(x;y;z)=(2;251;252)$.

შემოწმებით ჩანს, რომ აკმაყოფილებს.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

30.04.2013/ მათ/III/206

ამოცანა № 1

გვერდი № 3

ბ) ვთქვათ $k=0 \Rightarrow x=1$. ჩავსვათ:

$y^3+z^3=2012(yz+2) \Rightarrow (y+z)(y^2-yz+z^2)=2012(yz+2)$.

ცხადია $y\equiv z \pmod 2$ რადგან $y^3+z^3 \vdots 2$.

თუ $y=z \Rightarrow 2y^3=2012(y^2+2) \Rightarrow y \vdots 503 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2+2 \vdots 503^2$, რაც შეუძლებელია.

თუ $y\neq z$ და $|y-z| \vdots 2 \Rightarrow z-y \geq 2 \Rightarrow (z-y)^2 \geq 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2-yz+z^2 \geq yz+4 > yz+2 \Rightarrow \underline{y+z < 2012}$.

$y^3+z^3 \vdots 503$, თუ ერთ-ერთი იყოფა 503-ზე, მაშინ მეორეც იყოფა, მაშინ ნამრავლი მათი იყოფა $503^2 \Rightarrow (yz+2) \vdots 503^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \vdots 503$ რაც შეუძლებელია. ანუ $y \not\vdots 503$ და $z \not\vdots 503$.

ანუ $(y,z) \not\vdots 503$. ცხადია:

$z^6-y^6 \vdots 503$
$z^{502}-y^{502} \vdots 503$ | და ფერმას მცირე თეორემით: $\Rightarrow z^2-y^2 \vdots 503$. ანუ:

$(z-y)(z+y) \vdots 503$. ანუ $(z-y) \vdots 503$ ან $(z+y) \vdots 503 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z-y=503 \\ z-y=1006 \\ z-y=1509 \end{array}\right. \text{ ან } \left[\begin{array}{l} z+y=503 \\ z+y=1006 \\ z+y=1509 \end{array}\right.$$

→ რადგან $z-y < z+y < 2012$. თუ მხოლოდ $z\equiv y \pmod 2$.
$z-y \vdots 2 \quad z+y \vdots 2$.

ანუ $z-y=1006$ ან $z+y=1006$.

თუ $z+y=1006 \Rightarrow z^2-yz+y^2=2yz+4 \Rightarrow$
$\Rightarrow z^2+y^2=3yz+4 \Rightarrow (z+y)^2=1006^2=5zy+4 \Rightarrow 1006^2-4 \vdots 5$ რაც არასწორია. ანუ ამ შემთხვევაში არ გვაქვს ამონახსნი.

თუ $z-y=1006 \Rightarrow (z+y)((z-y)^2+zy)=2012(zy+2) \Rightarrow$
$\Rightarrow (z+y)(1006^2+zy) \vdots 503$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

30.04.2013/ მათ/III/ 206

ამოცანა № 1

თუ $(z+y) \vdots 503$, ამასთან $z-y = 1006 \Rightarrow x \vdots 503$ და $y \vdots 503$, რაც როგორც ვიცით შეუძლებელია.

თუ $(1006^2 + zy) \vdots 503 \Rightarrow zy \vdots 503$ და ამასთან $z-y = 1006 \vdots 503 \Rightarrow x \vdots 503$ და $y \vdots 503$ -ზეც შეუძლებელია.

ანუ არც ერთ შემთხვევაში ამოხსნა არ აქვს.

მაშასადამე ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $x \le y \le z$ პირობით არის:

$(x; y; z) = (2; 251; 252)$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

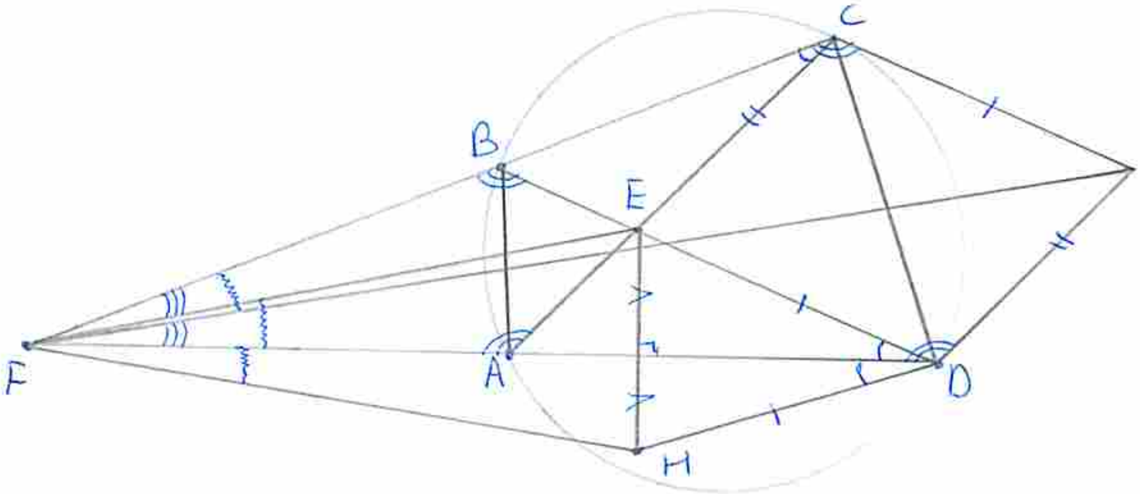
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

30.04.2013/ მათ/III/ 206

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



$\angle BCA = \angle BDA$ და $\angle EDG = \angle ECG$. $\Rightarrow \angle FCG = \angle FDG$. ანუ:

$\frac{FG}{\sin\angle FCG} = \frac{FG}{\sin\angle FDG} \Rightarrow \triangle FCG$ და $\triangle FDG$ -ების შემოხაზული წრე-წირის რადიუსი ტოლია $\Rightarrow \frac{CG}{\sin\angle CFG} = \frac{GD}{\sin\angle DFG} \Rightarrow \frac{\sin\angle CFG}{\sin\angle DFG} =$

$= \frac{CG}{GD} = \frac{ED}{EC}$, ასევე $AE\cdot EC = BE\cdot ED \Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sin\angle CFG}{\sin\angle DFG} = \frac{AE}{BE}$. ასევე: $\angle FBE = \angle FCG = \angle ADG = \angle FAE$.

ანუ FBE და FAE სამკუთხედებს შემოხაზული წრეწირის რადიუ-სები ტოლია $\Rightarrow \frac{AE}{\sin\angle EFA} = \frac{BE}{\sin\angle EFB} \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{\sin\angle EFA}{\sin\angle EFB}$. ვიღებთ:

$\frac{\sin\angle CFG}{\sin\angle DFG} = \frac{\sin\angle EFA}{\sin\angle EFB}$. $\angle CFD \equiv x$, $\angle DFG \equiv \alpha$, $\angle EFB \equiv \beta$. მაშინ გვაქვს:

$\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(x-\beta)}{\sin\beta} \Rightarrow \sin x\cdot ctg\,\alpha - \cos x = \sin x \cdot ctg\,\beta - \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x(ctg\,\alpha - ctg\,\beta) = 0$. $x \in (0;180^\circ) \Rightarrow \sin x \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow ctg\,\alpha = ctg\,\beta$, ასევე $\alpha \in (0;180^\circ)$ და $\beta \in (0;180^\circ)$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

30.04.2013/ მათ/III/ 206

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

ანუ $\alpha = \beta$. ანუ: $\angle BFE = \angle DFG$ და $\angle CFG = \angle EFA$. თუმცა: $\angle EFA = \angle HFD$, ანუ: $\angle BFA = \angle GFH$. (1).

თუმცა: $\angle BFA = \frac{\breve{CD} - \breve{BA}}{2}$. ამასთან:

$\angle HDG = \angle FDH + \angle FDG = \angle BDA + \angle FDG = \frac{\breve{AB}}{2} + \angle FAC =$
$= \frac{\breve{AB}}{2} + (180° - \frac{\breve{CD}}{2}) = 180° - (\frac{\breve{CD} - \breve{AB}}{2})$.

ანუ $\angle BFA + \angle HDG = 180°$. $\Rightarrow \angle GFH + \angle HDG = 180°$ ანუ FHDG ოთხკუთხედი ციკლურია.

რ. დ. გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17	30.04.2013/ მათ/III/206

ამოცანა № 3 გვერდი № 1

$f(x+f(y+f(z))) = y+f(x+z).$ $(*)$

$x=0.$ $\Rightarrow f(f(y+f(z))) = y+f(z).$

$\forall x \in Q$-სთვის, z დავაფიქსიროთ და $y = x - f(z) \in Q.$

$f(f(x)) = x$ (1) $x \in Q$ - ნებისმიერი.

თუ $f(x)=f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow x=y.$ ანუ ფუნქცია ინიექციურია $\Rightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y.$

$z=0.$ $f(0) \equiv c.$

$f(x+f(y+c)) = y+f(x).$ (2)

$y=-c.$ $\Rightarrow f(x+c) = f(x)-c.$

ვიცით $f(0)=c \Rightarrow f(c)=0 \Rightarrow f(2c) = f(c)-c = -c \ \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ინდუქციით, რომ, $f(kc) = c(1-k).$ $k \in N.$

$x \equiv mc,$ $y = nc.$ $z = tc$: $x, y, t \in N.$ ჩვენთვის [illegible]!

~~$f(mc+f(c(n+1))) = y+f(mc)$~~

~~$f(mc+c(1-(n+1))) = y+c(1-m).$~~

~~$f(c(m-n)) = y+c-cm.$~~

~~$c(1-m+n) = y+c-cm \Rightarrow$~~

$f(mc+f(nc+c(1-t))) = mc+f(c(m+t)) = nc+c(1-m-t)$

$f(mc+c(1-n-1+t)) = nc+c(1-m-t)$

$c(1-m+n-t) = c(1-m-t+n).$ [illegible]. თუ

~~$c \neq 0 \Rightarrow c = 0.$~~ $f(x) = t - x$ $t \in Q.$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

30.04.2013/ მათ/III/206

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

ხოლო თუ $C=0$. (2)-დან $\Rightarrow f(x+f(y)) = y+f(x)$.

x-ის ადგილზე ჩავსვათ $f(x)$.

$f(f(x)+f(y)) = x+y = f(f(x+y))$.

[illegible]! $f(x)+f(y) = f(x+y)$. $\Rightarrow f(x_1+\dots+x_n) = f(x_1)+\dots+f(x_n)$

და $f(-x) = f(x)$.

$f(1) = t \Rightarrow f(n) = n \cdot f(1) = nt$. $n \in N_0$.

$f(-n) = -f(n) = -nt$.

$f(m) = \underbrace{f(\frac{m}{n}) + \dots + f(\frac{m}{n})}_{n} \Rightarrow f(\frac{m}{n}) = \frac{mt}{n}$.

ანუ $f(x) = xt$ $x \in \mathbb{Q}$.

$f(f(x)) = x \rightarrow t^2 x = x$. $t=0$. ან $t=1$.

$t=0$ (*)-ს არ აკმაყოფილებს.

$t=1 \Rightarrow x+y+z = x+y+z$.

ანუ პასუხი: $f(x) = x$