SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 12

30.04.2013/ მათ/III/ 203

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x\le y\le z\in N$ $\quad x^3(y^3+z^3)=2012(xyz+2)$

$x^3\equiv 0(\bmod 4)$, $x^3\equiv 1$: y^3 და $z^3\equiv 1$ ... $\equiv 0$ ... $\equiv 1(\bmod 4)$

1 და 1 ... $\equiv 2(\bmod 4)$

... $\equiv 0$ ... $x\vdots 4$ და $z^3, y^3\vdots 4$

$x^3\vdots 8$, და $z^3, y^3\vdots 8$.

$y^3\vdots 8 (y\vdots 2)$ $y=2a$ $\quad z^3\vdots 8$, $z=2b$.

$\cancel{8}x^3(a^3+b^3)=\cancel{8}\cdot 503(2abx+1)$

$x^3(a^3+b^3)\equiv\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}(\bmod 4)$ $\quad 503\equiv -1(\bmod 4)$ ... $2abx+1\equiv\begin{bmatrix}0\\ \cancel{-1}\\ 2\end{bmatrix}(\bmod 4)$ ...

... $2abx\equiv\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\bmod(4)$ $\quad 2abx$ ... $\equiv 2$ და $0(\bmod 4)$ ...

$-1, 1$ - ... $\equiv 2(\bmod 4)$ ... $503(2abx+1)\equiv 1(\bmod 4)$ ...

$\begin{bmatrix}a^3\equiv(0)\\ b^3\equiv\end{bmatrix}(\bmod 4)$ ... $2ab\cancel{x}\equiv 1(\bmod 4)$ ...

$503(2ab*+1)\equiv -1(\bmod 4)$ ...

... x, y, z

8) $x^3=8k^3$

$8k^3(y^3+z^3)=503\cdot 8(kyz+1)$ $\quad kyz+1\vdots k^3$ ... $503\vdots k^3$ ...

... $k=1$ ...

$z^3+y^3=503(yz+1)$

	0 0 (0)	-1	
	1 1 (2)	-1	
	1 0 (1)	-1	

$yz+1\equiv 0$ $\quad yz\equiv -1$ (...) ... $-$ ...

$yz+1\equiv 2$ $\quad yz\equiv 1$

$yz+1\equiv -1$ $\quad yz\equiv 2$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 12

30.04.2013/ მათ/III/ 203

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$f(x+f(y+f(z))) = y + f(x+z) \quad f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$-f(1) \to y \quad 1 \to z. \quad 0 \to x$

$f(f(-f(1)+f(1))) = -f(1)+f(1)$

$f(f(0)) = 0.$

$x \to x \quad 0 \to y \quad -x \to z$

$f(x+f(f(-x))) = f(0)$

თუ $k=t$ ეს $f(k)=f(t)$

ეს $f(f(x+f(f(-x))) = f(f(0)) = 0.$

$0 \to x$ ეს $f(f(y+f(z))) = y + f(z)$

$y+f(z)$-მ [illegible] $q \in \mathbb{Q}$ [illegible]

[illegible] y [illegible] z [illegible]

$f(z) = q$ [illegible] q-ს [illegible] y-ს [illegible]

q-ს [illegible] $\forall x \in \mathbb{Q} \quad f(f(x)) = x$

$0 \to x \quad f(0) \to y \quad 0 \to z$

$f(f(2f(0))) = 2f(0)$

$0 \to z \quad -f(0) \to y \quad f(0) \to x$

$f(2f(0)) = f(f(0)) - f(0) \quad f(0) = a$

$f(2a) = -a.$

$f(f(2a)) = f(-a)$

$2a$ ეს $f(-a) = 2a.$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 12

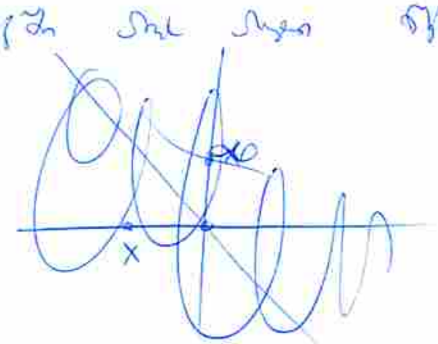
30.04.2013/ მათ/III/ 203

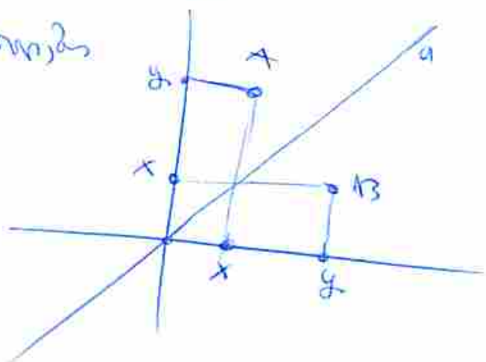
ამოცანა № 3

გვერდი № 2

[illegible] x [illegible] $f(x)=y$ $\Rightarrow$ $f(f(x))=f(y)$ [illegible] $f(f(x))=x \Rightarrow f(y)=x$ [illegible]

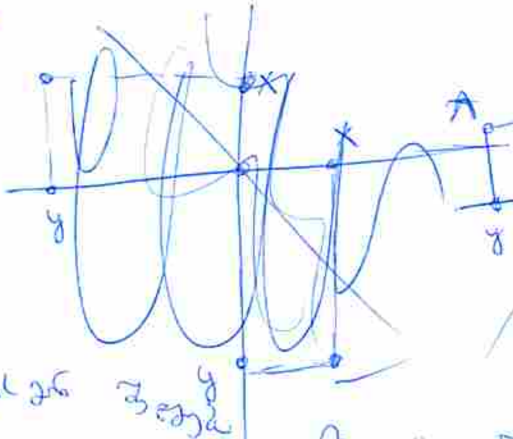
[illegible] A [illegible] B

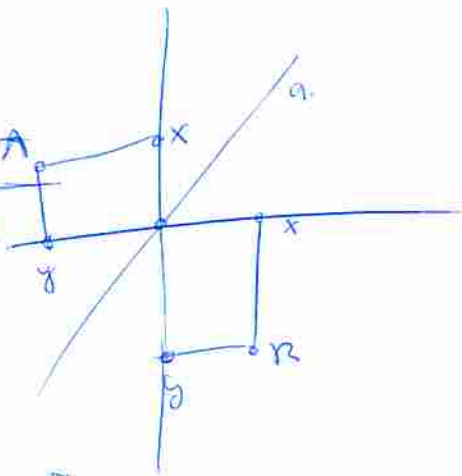




[illegible] x [illegible]

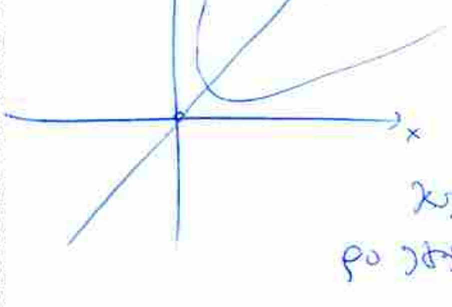
[illegible] y [illegible]





[illegible] A [illegible] B [illegible]

[illegible] A [illegible] B [illegible] $f(x)=x$ [illegible]



[illegible] $f(x)=x$ [illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

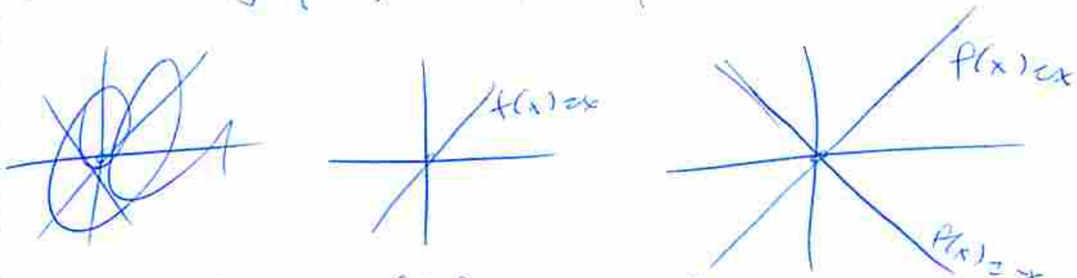
მაგიდა № 12

30.04.2013/ მათ/III/ 203

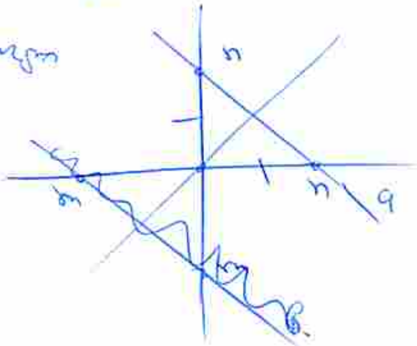
ამოცანა № 3

გვერდი № 3

მაშ ასეთი ფუნქციები $f(x)=x$ და $f(x)=-x$ ან ვნ $f(x)=x$-ს მსგავსი.



ეს ფუნქციებიც $f(x)=x$ და $f(x)-x$ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას



ავიღოთ ფუნქცია $ax+b$

მაშ $a\cdot 0+b=n$

$b=n$

$a\cdot n+n=0$

$a=-1$

ე.ი. $-x+n$

სადაც n ნებისმიერი რიცხვი

ან. სადაც $\in Q$

ეს ფუნქციებიც აკმაყოფილებს

$f(x+f(y+f(z)))=y-z-x+n$

და $y+f(x+z)$-იც $=y-x-z+n$. ანუ ესეც

აკმაყოფილებს. ე.ი. $f(x)=x$, ან $f(x)=-x+n$ (სადაც $n\in Q$)