შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 003

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x^3+y^3+z^3=2011^{2011}$ $x^3+y^3+z^3=A$.

$x^3+y^3+z^3-1=2011^{2011}-1 \vdots 2010;$ $A-1=2010\cdot p$

$x^3+y^3+z^3+1=2011^{2011}+1 \vdots 2012;$ $A+1=2012\cdot q$

$2=2012q-2010p$ რადგან $A-1<A+1 \Rightarrow$

$1=1006q-1005p$. $\Rightarrow 2010p<2012q \Rightarrow$

ამონახსნია $p=q=1$. p და $q\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow \frac{p}{q}<\frac{1006}{1005}$,

არ გვაწყობს.

თუ $q>p$ მაშინ

$x;y;z$-ს ჰქონდეთ საერთო $1006q-1005p>1$. არ გვაწყობს

ვთქვათ ჰქონდეთ საერთო გამყოფი – 2011, მაშინ თუ $x=2011^k\cdot a$,

$y=2011^m\cdot b;\ z=2011^n\cdot d \Rightarrow \cancel{A=2011}\ \cancel{2011}$ ვთ. $k<m<n \Rightarrow$

$=2011^k(a+2011^{m-k}(b+2011^{n-m+k}\cdot d))$ რადგან $2011 \nmid a, b \Rightarrow$

$\Rightarrow x;y;z$-ს საერთო გამყოფი არ აქვთ.

$(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3=2011^{2011}$

$(x+y+z)\cdot k=2011^{2011}-3xy(x+y)$

$k=\frac{2011^{2011}-3xy(x+y)}{x+y+z}$ k მთელია. $\cancel{3xy(x+y) \vdots x+y+z}$

$3xy(x+y) \vdots x+y+z \Rightarrow$

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 003

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

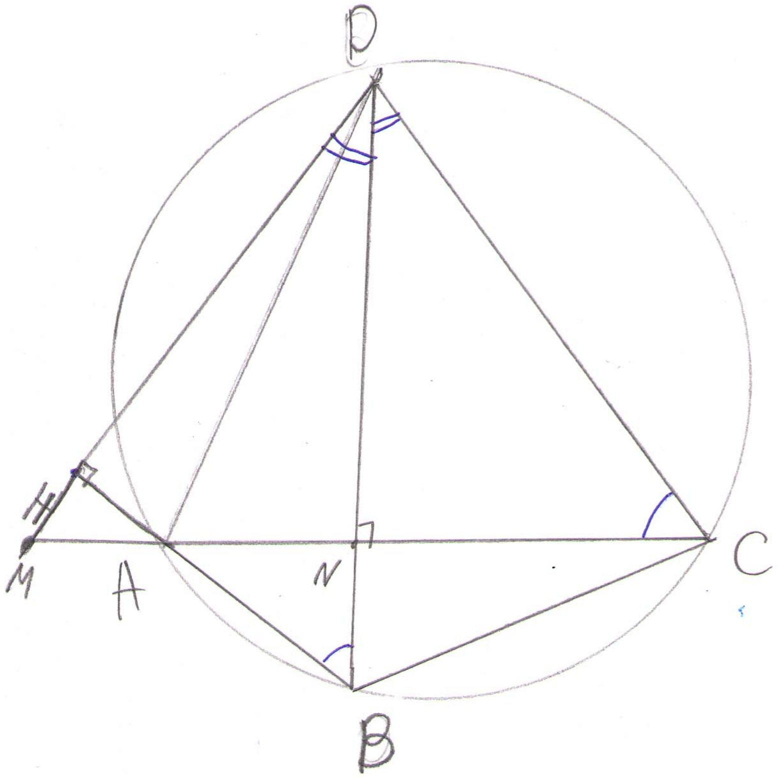
$$\Rightarrow 2011^{2011} \vdots x+y+z \Rightarrow 2011^{2011} \not\vdots (x+y+z)^3.$$

აქ $x^3+y^3+z^3 = 2011^{2011} = 2011 \cdot 2011^{2010} \Rightarrow$

$$= \left(\frac{x}{2011^{670}}\right)^3 + \left(\frac{y}{2011^{670}}\right)^3 + \left(\frac{z}{2011^{670}}\right)^3 = 2011.$$

ამ განტოლებას უნდა ჰქონდეს ნატურალური ამონახსნები

უ.ვ. $\frac{AM}{AC}$



$\frac{AM}{MN} = a$

$\frac{MN}{AM} = \frac{1}{a}$

$\angle MCD = \angle HBD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDB = 90 - \angle MCD = \angle BDH$

$DB \perp MC$

$\Rightarrow MD = DC;$

$MN = NC;$ $\frac{AM}{AC} = z.$ $\frac{AC}{AM} = \frac{1}{z} = \frac{2 \cdot MN - AM}{AM} =$

$= 2 \cdot \frac{MN}{AM} - 1 = \frac{2}{a} - 1 = \frac{2-a}{a} \Rightarrow z = \frac{a}{2-a};$

თუ DH-[illegible] არის [illegible] [illegible]

ანალოგ. [illegible] [illegible] $z = \frac{a}{a+2};$

რადგან $P(x)$ ღებულობს მნიშვნელობას 2011-ს რაღაც
x_1 წერტილში ამიტომ $P(x_1) - 2011 = 0$. ~~$P(x_1)$~~
$P(x_1) - 2011$ - შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასეთი სახით
~~$(x - x_1)(P'(x) - 2011) = 0$~~ $(x - x_1)(P'(x) - 2011) = 0$
რადგან $P(x)$ ღებულობს 2011 x_1-ში მაშინ $P(x) - 2011 = (x - x_1)P'(x)$
არანაკლებ 5 სხვადასხვა წერტილში. ვთქ. $P(x) = 0$ როცა $x = x_0$.) =>

=> $P(x_0) - 2011 = (x_0 - x_1)\, P'(x_0)$. რადგან x_0-მთელია
და P მთელკოეფიციენტებიანია => $P'(x_0)$ მთელია. ასევე
მთელია $x_0 - x_1$. $(x_0 - x_1) \cdot P'(x_0) = -2011$.
-2011 აქვს 4 სხვადასხვა გამყოფი ესენია
$-1; 1; 2011; -2011$. რადგან გვაქვს 5 $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5$ =>
=> ერთ-ერთში $P'(x_0)$ მთელი არ იქნება.
ანუ x_0 არ იქნება მთელი.
ეს წინააღმდეგობაა.