შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 033

ამოცანა № 1.

გვერდი № 1.

შევადგინოთ ცხრილი რომლის მარცხენა სვეტში მოცემული იქნება ნებისმიერი $n\in N$-ის 9-ზე გაყოფის ნაშთი ხოლო მარჯვენაში ამ რიცხვის კუბის 9-ზე გაყოფის ნაშთი: (ნაშთში ვგულისხმობ მოდულს ანუ $n\equiv 8 (mod.9) \Leftrightarrow n\equiv -1(mod.9)$.)

n	n^3
0	0
1	1
2	-1
3	0
4	1
5	-1
6	0
7	1
8	-1

ვხედავთ რომ ნებისმიერი რიცხვის კუბი 9-ზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევს ან 1-ს; ან 0-ს; ან (-1)-ს. ამიტომ $x^3+y^3+z^3$ $x,y,z\in N$. მრავალწევრის 9-ზე გაყოფისას შესაძლო ნაშთები იქნება: 3;2;1;0;(-1);(-2);(-3). განვიხილოთ თუ რა ნაშთს გვაძლევს 2011^{2011} 9-ზე გაყოფისას. $2011^{2011}=2011^{2010}\cdot 2011=(2011^3)^{670}\cdot 2011$.

$2011\equiv 4(mod.9) \Rightarrow 2011^3\equiv 4^3(mod.9)$. ანუ $2011^3\equiv 1(mod.9) \Rightarrow (2011^3)^{670}\equiv 1(mod.9)$

$\left.\begin{matrix} 2011\equiv 4(mod.9) \\ (2011^3)^{670}\equiv 1(mod.9). \end{matrix}\right) \Rightarrow 2011\cdot(2011^3)^{670}\equiv 4(mod.5) \Leftrightarrow 2011^{2011}\equiv 4(mod.9)$.

და ტოლობის მარჯვენა მხარე 9-ზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევს 4-ს მარცხენის შესაძლო ნაშთები 3;2;1;0;8(-1);7(-2);6(-3); რადგან ამ შესაძლო ნაშთებში არ გვხვდება 4-იანი ამიტომ $x^3+y^3+z^3=2011^{2011}$ $x,y,z\in N$ რიცხვებისათვის არ აქვს ამონახსნი.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

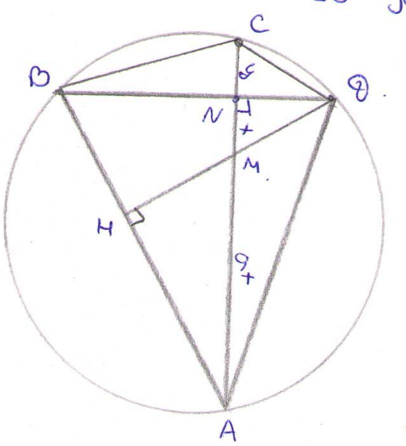
მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 033

ამოცანა № 2

გვერდი № 1.

რადგან ოთხკუთხედი წრ-შემოხაზულია და დიაგონალები ურთიერთმართობულია ამიტ. წრ-ს ცენტრი ოთხკუთხედის შიგნით იქნება.



მოც: ▱ABCD. $AC \perp BD$. $DH \perp AB$. $H \in AB$ $M \in HD$

$M \in CA$. $AM:MN=a$.

ნ.ვ. $AM:AC$.

$NM \equiv x$ მაშინ. $AM = ax$ $CN \equiv y$.

წრეწირში ურთიერთგადამკვეთი ქორდების თეორემით $BN \cdot ND = CN \cdot NA$

$BN \cdot ND = y \cdot x(a+1)$.

$\angle MDN \equiv \alpha$. $\angle NMD = 90-\alpha$ ($\triangle MND$) $\angle NMH = 180 - \angle NMD = 90+\alpha$. $\angle NBH = 180 - \angle NMH$ (რადგან ▱BNMH-ში, $\angle N + \angle H = 180^\circ$) $\angle NBH = 90-\alpha$. გამოვიდა. $\angle NBH = \angle NMD$ $\angle DNM = \angle BNA$ ამიტომ დაწერილი ტოლობა:

$\triangle MND \sim \triangle BNA \Rightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{NA}{ND} \Leftrightarrow \frac{BN}{x} = \frac{x(a+1)}{ND} \Leftrightarrow BN \cdot ND = x^2(a+1)$. ვიცით.

$BN \cdot ND = y(a+1) \cdot x$ $x^2\cancel{(a+1)} = y\cancel{(a+1)}\cancel{x} \Rightarrow y = x$.

$CN = x$. ბოლო $AC = AN + CN = x(a+1) + x = x(a+2)$

$\frac{AM}{AC} = \cancel{\frac{x(a+1)}{x(a+2)}} = \frac{ax}{(a+2)x} = \frac{a}{a+2}$.

პასუხი: $AM:AC = \frac{a}{a+2}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 033

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

დავუშვათ მოცემული პოლინომი არის $P(x)=k_0 x_0^n+k_1\cdot x_1^{n-1}+\dots+k_{n-1}x_{n-1}+k_n$.
$P(x)=2011 \iff P(x)-2011=0$. $P(x)-2011\equiv t(x)$ რადგან ჩვენ $t(x)=0$ აქვს 5 ამონახსნი იგი დაიშლება შემდეგნაირად თუ ამონახსნებია: $x_1; x_2; x_3; x_4;$ x_5. $t(x)=k_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\cdot q(x)$. (~~დავუშვათ P(x)=0-ს აქვს ამონახსნი~~ x_0) $P(x)=t(x)+2011$. $P(x)=q(x)\cdot(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot(x-x_4)(x-x_5)+2011=0$. ამ ტოლობას რა შეიძლება ამონახსნი ჰქონდეს მთელ რიცხვებში ჩვენ ~~სა პოლინომის და~~ $q(x)$ პოლინომი მთელ კოეფიციენტებიანია.