შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 007

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

$x^3+y^3+z^3=2011^{2011}$.

განვიხილოთ a ~~[illegible]~~ ნატურალური რიცხვის კუბის 9-ზე გაყოფით მიღებული შესაძლო ნაშთები.

$$\left.\begin{array}{l}1^3\equiv 1\\ 2^3\equiv -1\\ 3^3\equiv 0\\ 4^3\equiv 1\\ 5^3\equiv -1\\ 6^3\equiv 0\\ 7^3\equiv 1\\ 8^3\equiv -1\\ 9^3\equiv 0\\ \dots\end{array}\right\}\pmod 9.$$

მაშასადამე a^3-მა 9-ზე გაყოფისას შეიძლება მოგვცეს ნაშთები: $\{-1;0;1\}$.

$2011\equiv 4 \pmod 9 \Rightarrow 2011^{2011}\equiv 4^{2011} \pmod 9$.

$$\left.\begin{array}{l}4^1\equiv 4\\ 4^2\equiv 7\\ 4^3\equiv 1\\ 4^4\equiv 4\\ 4^5\equiv 7\\ 4^6\equiv 1\\ \dots\end{array}\right\}\pmod 9 \longrightarrow$$

ანუ $4^{3k+1}\equiv 4 \pmod 9$
$4^{3k+2}\equiv 7 \pmod 9$
$4^{3k+3}\equiv 1 \pmod 9$, სადაც $k\geq 0$ და მთელია.

მაშინ რადგანაც: $2011\equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4^{2011}\equiv 4 \pmod 9 \Rightarrow 2011^{2011}\equiv 4 \pmod 9$.

ანუ მივიღეთ, რომ $x^3+y^3+z^3\equiv 4 \pmod 9$. მაგრამ $\{-1;0;1\}$ ნაშთების სიმრავლიდან ვერ ავარჩევთ 3-ვე რიცხვს (თუნდაც ერთნაირს) რომ მათი ჯამი 4-ის ტოლი იყოს 9-ზე გაყოფისას. ~~[illegible]~~

მაშასადამე ისეთი $x,y,z\in\mathbb{N}$, რომ: $x^3+y^3+z^3=2011^{2011}$ არ არსებობს. რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

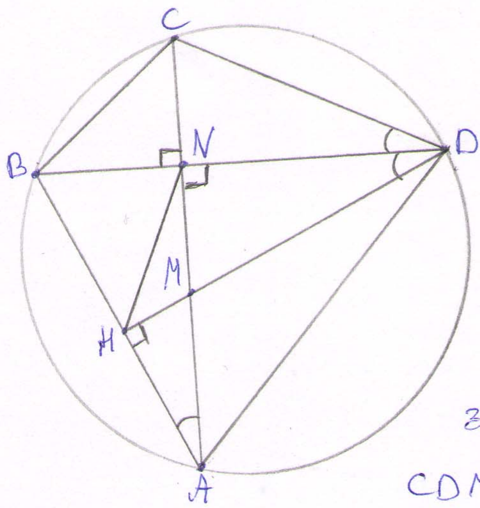
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 007

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



მოც: $\frac{AM}{MN}=a$

უ.ვთ: $\frac{AM}{AC}=?$

რადგან ABCD ოთხკუთხედი ჩახაზულია, ამიტომ $\angle BAC=\angle BDC$ (1), რადგან $\breve{BC}$ რკალზე დაყრდნობილი კუთხეებია. AHND ოთხკუთხედში $\angle AHD=\angle AND=90°$, ანუ AHND ოთხკუთხედიც ჩახაზულია, ამიტომ: $\angle HAN=\angle HDN \Rightarrow \angle BAC=\angle HDN$ (2).

მაგრამ (1) და (2) ტოლობებიდან კი გვაქვს, რომ: $\angle BDC=\angle HDN$, ანუ სამკუთხედ CDM-ში DN სიმაღლე ბისექტრისაა, ანუ $\triangle CDM$ ტოლფერდაა, მაშინ DN მონაკვეთი მედიანაც იქნება. ანუ $MN=NC$ (3)

ვთქვათ $MN=t$, მაშინ ვპოულობთ $AM=a\cdot t$. (3)-დან კი: $CN=t$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AC}=\frac{AM}{AM+MN+NC}=\frac{at}{at+2t}=\frac{a}{a+2}.$$

პასუხი: $\frac{AM}{AC}=\frac{a}{a+2}$.

დავუშვათ დასამტკიცებლის საწინააღმდეგო. ვთქვათ $x_0 \in Z$-სთვის, $P(x_0)=0$. ვთქვათ ის 5 განსხვავებული წერტილი, რომლებისთვისაც პოლინომის მოდული 2011-ის ტოლი იყოს: x_1, x_2, x_3, x_4 და x_5. ანუ:

$$|P(x_1)|=|P(x_2)|=|P(x_3)|=|P(x_4)|=|P(x_5)|=2011.$$

რადგანაც: $(P(x)-P(y)) \vdots (x-y)$, $x,y \in Z$ და $x \neq y$, ამიტომ:

$$|P(x_1)-P(x_0)| = 2011 \vdots (x_1-x_0) \equiv y_1$$
$$|P(x_2)-P(x_0)| = 2011 \vdots (x_2-x_0) \equiv y_2$$
$$|P(x_3)-P(x_0)| = 2011 \vdots (x_3-x_0) \equiv y_3$$
$$|P(x_4)-P(x_0)| = 2011 \vdots (x_4-x_0) \equiv y_4$$
$$|P(x_5)-P(x_0)| = 2011 \vdots (x_5-x_0) \equiv y_5$$

მაგრამ y_1, y_2, y_3, y_4 და y_5 წყვილწყვილად განსხვავებული, არანულოვანი რიცხვებია. ანუ 2011 უნდა 5 ურთიერთგანსხვავებულ მთელ რიცხვზე, რაც შეუძლებელია, რადგან 2011-ის გამყოფთა სიმრავლეა: $\{-2011, -1; 1; 2011\}$.

მაშასადამე ჩვენი დაშვება მცდარია. ანუ არ არსებობს ისეთი $x \in Z$, რომ $P(x)=0$.

რ.დ.გ.