

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი  
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო  
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 023

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

პირველი რეტი ევაკუილი იმ ტვიდის 2011<sup>2011</sup> 9-8, ყუივის  
სეზამი. ზუი ვუი ამი რევი სევი ჯამ ე  
ავიის რევი დევი ყუივის სევი ამი ე რევი  
რევი ვევირევი რევი 2011 ≡ 4 (mod 9) ჯამი

$$2011^3 \equiv 4^3 \pmod{9} \equiv 64 \pmod{9} \equiv \cancel{1} \pmod{9} \equiv 1 \pmod{9} \text{ ჯუ } 2011^{2011} = 2011^{2010} \cdot 2011$$

ბევი რევი  $\frac{2010}{3} = 670$  რევი  $2011^{2011} = 2011^{3 \cdot 670} \cdot 2011 = 2011^{3 \cdot 670} \cdot 2011$   
 $= \cancel{(2011^3)^{670}} = (2011^3)^{670} \cdot 2011$  ბევი რევი  $2011^3 \equiv 1 \pmod{9}$

რევი  $(2011^3)^{670} \equiv 1^{670} \pmod{9} \equiv 1 \pmod{9}$  ჯუ ვევი ამი!

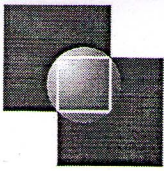
$$2011^{2011} = 2011^{3 \cdot 670} \cdot 2011 = (2011^3)^{670} \cdot 2011 \equiv \cancel{1} \cdot 2011 \pmod{9} \equiv 2011 \pmod{9} \equiv \cancel{4} \pmod{9} \equiv 4 \pmod{9}$$

ჯუ ზუი რევი ამი  $2011^{2011} \equiv 4 \pmod{9}$

სევი ვევირევი ამი რევირევი  $x \in \mathbb{N}$  რევი  $x \equiv \cancel{1} \pmod{9}$   
 $x \equiv \cancel{0} \pmod{9}$

$x^3$  9-8 ყუივის სევი დევირევი რევი 1, 0, 8, -1, -1  
 $x \equiv \cancel{0} \pmod{9}$  რევი  $x \equiv \cancel{0} \pmod{9}$  რევი

რევი ვევირევი ამი  $x^3 \equiv \cancel{x^3} \pmod{9} \equiv (x+3k)^3 \pmod{9}$  რევი  $k \in \mathbb{N}$   
 $(x+3k)^3 = x^3 + 3 \cdot x \cdot (3k)^2 + 3 \cdot x^2 \cdot 3k + (3k)^3 = x^3 + 3 \cdot 9 \cdot x \cdot k^2 + 3 \cdot 3 \cdot k \cdot x^2 + 27k^3$   
 $= x^3 + 9 \cdot 3 \cdot x \cdot k^2 + 9 \cdot k \cdot x^2 + 9 \cdot 3 \cdot k^3 \equiv x^3 \pmod{9}$  (რევი  $9 \cdot 3 \cdot x \cdot k^2$ ,  $9 \cdot k \cdot x^2$  ე  $9 \cdot 3 \cdot k^3$  რევი  
 რევი 9-8) ჯუ ზუი რევი ამი  $x^3 \equiv (x+3k)^3 \pmod{9}$



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი  
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო  
ოლიმპიადისათვის

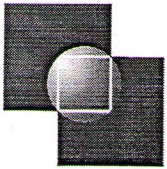
მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 023

ამოცანა № 1

პერდი № 2

~~თუ~~  $x \equiv 0 \pmod{9}$  მაშინ  $x^3 \equiv 0 \pmod{9} \equiv (x+3)^3 \pmod{9} \equiv (x+6)^3 \pmod{9}$   
 თუ  $x \equiv 3 \pmod{9}$  ან  $x \equiv 6 \pmod{9}$  მაშინ  $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$   
 $x \equiv 1 \pmod{9}$  მაშინ  $x^3 \equiv 1 \pmod{9} \equiv (x+3)^3 \pmod{9} \equiv (x+6)^3 \pmod{9}$   
 თუ  $x \equiv 4 \pmod{9}$  ან  $x \equiv 7 \pmod{9}$  მაშინ  $x^3 \equiv 1 \pmod{9}$   
 $x \equiv 2 \pmod{9}$  მაშინ  $x^3 \equiv 8 \pmod{9} \equiv -1 \pmod{9} \equiv (x+3)^3 \pmod{9} \equiv (x+6)^3 \pmod{9}$   
 თუ  $x \equiv 5 \pmod{9}$  ან  $x \equiv 8 \pmod{9}$  მაშინ  $x^3 \equiv -1 \pmod{9}$   
 ხელსაწყო  $a \in \mathbb{N}$  განვიხილოთ  
 $9k, 9k+1, 9k+2, 9k+3, \dots, 9k+8$  სხვადასხვა  $x \in \mathbb{N}$  ნებისმიერი  $x^3$  გვაქვს გვაქვს ნებისმიერ შემთხვევაში  
 $1, 0$  ან  $-1$ . აქედან გამომდინარე  $x^3+y^3+z^3 \pmod{9}$  სხვადასხვა  $x, y, z \in \mathbb{N}$   
 $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ . ნებისმიერ შემთხვევაში  $x^3+y^3+z^3 \pmod{9}$   
 არ არის  $4 \pmod{9}$  თუ ნებისმიერ  $x, y, z \in \mathbb{N}$  ნებისმიერი  
 $x^3+y^3+z^3 \pmod{9}$  ხელსაწყო  $2011^{2011} \equiv 4 \pmod{9}$   
 ამიტომ  $x, y, z \in \mathbb{N}$  ნებისმიერი  $x^3+y^3+z^3 \neq 2011^{2011}$   
 (ნებისმიერ შემთხვევაში)  $x, y, z \in \mathbb{N}$  ნებისმიერი  $x^3+y^3+z^3 = 2011^{2011}$   
 ვ.დ.გ



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი  
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო  
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 023

ამოცანა №

2

გვერდი №

1

ვატყვი  $\angle NAB = \alpha$  მაშინ  $\triangle ANB \Rightarrow \angle NBA = 90 - \alpha$  მაშინ  $\angle ANB$  მართა.  
 ახლა დავუხაზავთ  $DH \perp AB$  საყრდენად. მაშინ  $\angle HDB = 90 - \alpha$  ხოლო  
 $\triangle DHB$  მართა, ამიტომ  $\triangle DHB \Rightarrow \angle HDB = \alpha$ . მასთან  $\angle CAB = \alpha$  და დავუხაზავთ,  
 $CB$  წარმოვათქვამთ. სხვა  $\angle CDB$ -ს დავუხაზავთ  $CB$  წარმოვათქვამთ ვიღებთ რომ  
 $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$ . ახლა ჩვენ უნდა ვიპოვოთ რომ  $\angle CDB = \alpha$  და  $\angle HDB = \alpha$ .  
 ახლა უნდა ვიპოვოთ რომ  $\triangle CDM$ -ში  $DN$  არის მსხვილი ( $\angle CDB = \angle HDB = \alpha$ )  
 და მასთან სწორად ( $AC$  მართაობა  $DB$ -ს) ახლა რომ დავუხაზავთ ახლა  
 შევიძინებთ, ახლა  $\triangle DMC \Rightarrow DN$ -მართა, აქედან ვსწავთვით რომ  $MN = NC$ .  
 ვიპოვებთ ახლა  $\frac{AM}{MN} = a$  ახლა  $AM = a \cdot MN$ . ახლა ჩვენ  $MN = 1$   
 ვიპოვებთ  $x$  ახლა  $MN = x$  მაშინ  $AM$  უნდა იყოს  $ax$ :  
 $AM = a \cdot MN = ax$ . ხოლო მაშინ ~~AM = ax~~ ~~AM = ax~~  
 $NC = MN = x$  ამიტომ:  $AC = AM + MN + NC = ax + x + x = ax + 2x = x(a+2)$   
 ხოლო მაშინ  $AM = ax$  ამიტომ  $\frac{AM}{AC} = \frac{ax}{(a+2)x} = \frac{a}{a+2}$   
 ვსწავთვით  $AM : AC = a : (a+2)$



