შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 023

ამოცანა № 1

პირველ რიგში დავადგინოთ რას იძლევა 2011^{2011} 9-ზე გაყოფისას ნაშთში. ჩვენ ვიცით რომ ნაშთი ნაკლებია 9ზე და ავიღოთ რიცხვი რომლის გაყოფისას 9-ზე ერთი და იგივე ნაშთს მივიღებთ რადგან $2011 \equiv 4 \pmod 9$ ამიტომ $2011^3 \equiv 4^3 \pmod 9 \equiv 64 \pmod 9 \equiv 1 \pmod 9$ ასევე $2011^{2011} = 2011^{2010} \cdot 2011$ ხოლო რადგან $\frac{2010}{3} = 670$ ამიტომ $2011^{2011} = 2011^{2010} \cdot 2011 = 2011^{3\cdot 670} \cdot 2011 = (2011^3)^{670} \cdot 2011$. ხოლო რადგან $2011^3 \equiv 1 \pmod 9$ ამიტომ $(2011^3)^{670} \equiv 1^{670} \pmod 9 \equiv 1 \pmod 9$ და ვიღებთ რომ!

$2011^{2011} = 2011^{3\cdot 670} \cdot 2011 = ((2011)^3)^{670} \cdot 2011 \equiv 1 \cdot 2011 \pmod 9 \equiv 2011 \pmod 9 \equiv 4 \pmod 9$ და ჩვენ მივიღეთ რომ $2011^{2011} \equiv 4 \pmod 9$

ახლა ვაჩვენოთ რომ ნებისმიერი $x \in N$-ისთვის x^3-ის 9-ზე გაყოფისას ნაშთში მიიღება მხოლოდ $1, 0$ ან -1-ი ამისათვის ~~თუ $x \equiv 0 \pmod 9$ მაშინ $x^3 \equiv 0 \pmod 9$~~ თავიდან ვაჩვენოთ რომ $x^3 \equiv (x+3k)^3 \pmod 9$ სადაც $k \in N$. რადგან $(x+3k)^3 = x^3 + 3\cdot x\cdot(3k)^2 + 3\cdot x^2\cdot 3k + (3k)^3 = x^3 + 3\cdot 9\cdot x\cdot k^2 + 3\cdot 3\cdot k\cdot x^2 + 27k^3 = x^3 + 9\cdot 3xk^2 + 9\cdot kx^2 + 9\cdot 3k^3 \equiv x^3 \pmod 9$ (რადგან $9\cdot 3xk^2$, $9kx^2$ და $9\cdot 3k^3$ იყოფა 9-ზე) და ჩვენ ვაჩვენეთ რომ $x^3 \equiv (x+3k)^3 \pmod 9$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	16.04.2011/ მათ/ I/ 023

ამოცანა № 1 | გვერდი № 2

ახლა თუ $X\equiv 0(\mathrm{mod}\ 9)$ მაშინ $X^3\equiv 0(\mathrm{mod}\ 9)\equiv(X+3)^3(\mathrm{mod}\ 9)\equiv(X+6)^3(\mathrm{mod}\ 9)$

ანუ თუ $X=9k$, $X=9k+3$ და $X=9k+6$ მაშინ $X^3\equiv 0(\mathrm{mod}\ 9)$.

ახლა თუ $X\equiv 1(\mathrm{mod}\ 9)$ მაშინ $X^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 9)\equiv(X+3)^3(\mathrm{mod}\ 9)\equiv(X+6)^3(\mathrm{mod}\ 9)$

ანუ თუ $X=9k+1$, $X=9k+4$ და $X=9k+7$ მაშინ $X^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 9)$

ახლა თუ $X\equiv 2(\mathrm{mod}\ 9)$ მაშინ $X^3\equiv 2^3(\mathrm{mod}\ 9)\equiv 8(\mathrm{mod}\ 9)=-1(\mathrm{mod}\ 9)\equiv(X+3)^3(\mathrm{mod}\ 9)\equiv$
$\equiv(X+6)^3(\mathrm{mod}\ 9)$ ანუ თუ $X=9k+2$, $X=9k+5$ და $X=9k+8$ მაშინ $X\equiv -1(\mathrm{mod}\ 9)$

რადგან ნებისმიერი $a\in N$ რიცხვისთვის ან $9k$, ან $9k+1$, ან $9k+2$, ან $9k+3$, ..., ან $9k+8$ სახის მაშინ ნებისმიერი $X\in N$ რიცხვისთვის X^3 9-ზე გაყოფისას ნაშთში მოგვცემს ან 1, ან 0 ან −1. ასე რომ ჯამი $X^3+y^3+z^3$ სადაც $x,y,z\in N$ შეიძლება მოგვცეს მაშინ 9-ზე გაყოფისას 4-ს, არა მოგვცემს ან 3, ან 2, ან 1, ან 0, ან −1, ან −2 ან −3. შესაბამისად არც ერთი სადაც $4(\mathrm{mod}\ 9)$ ანუ ნებისმიერი $X,y,z\in N$ რიცხვისთვის $X^3+y^3+z^3$ არ არის სადაც $4(\mathrm{mod}\ 9)$ რადგან $2011^{2011}\equiv 4(\mathrm{mod}\ 9)$ მაშინ ნებისმიერი $X,y,z\in N$ რიცხვისთვის $X^3+y^3+z^3\neq 2011^{2011}$ (რადგან 9-ზე გაყოფისას სხვადასხვა ნაშთს იძლევიან) შესაბამისად არ არის $X,y,z\in N$ რიცხვისთვის რომ სრულდებოდეს ტოლობა $X^3+y^3+z^3=2011^{2011}$!

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 023

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

ვთქვათ $\angle NAB=\alpha$ მაშინ $\Delta ANB \Rightarrow \angle NBA=90-\alpha$ რადგან $\angle ANB$ მართია. ახლა დავუკვირდეთ DHB სამკუთხედს. მაშინ $\angle HBD=90-\alpha$ ხოლო $\angle DHB$ მართია ამიტომ $\Delta DHB \Rightarrow \angle HDB=\alpha$. ამასთან $\angle CAB=\alpha$ და ეყრდნობა CB რკალზე. ასევე $\angle CDB$-ც ეყრდნობა CB რკალზე ამიტომ ვიღებთ რომ $\angle CAB=\angle CDB=\alpha$. ანუ ჩვენ მივიღეთ რომ $\angle CDB=\alpha$ და $\angle HDB=\alpha$. ანუ მივიღეთ რომ ΔCDM-ში DN არის ბისექტრისა ($\angle CDB=\angle HDB=\alpha$) და ამასთან სიმაღლე ($AC$ მართობულია DB-ზე) ანუ ეს სამკუთხედი არის ტოლფერდა, ანუ $\Delta DMC \Rightarrow DN$-მედიანა, საიდანაც ვასკვნით რომ $MN=NC$.
პირობის თანახმად $\frac{AM}{MN}=a$ ანუ $AM=a\cdot MN$. თუ ჩვენ MN-ს ავღნიშნავთ X-ით ანუ $MN\equiv X$ მაშინ AM იქნება ax:

$AM=a\cdot MN=ax$. ხოლო რადგან

$NC=MN=X$ ამიტომ: $AC=AM+MN+NC=ax+x+x=ax+2x=x(a+2)$

ხოლო რადგან $AM=ax$ ამიტომ $\frac{AM}{AC}=\frac{ax}{(a+2)x}=\frac{a}{a+2}$

პასუხი: $AM : AC = a : (a+2)$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №		16.04.2011/ მათ/ I/ 023

ამოცანა № 3 | გვერდი № 1

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს x_0-ისეთი $P(x_0)=0$. (x_0-მთელია)

მაშინ თუ მოცემული პოლინომი 2011-ს უდრის ხუთ x_1, x_2, x_3, x_4 და x_5 განსხვავებულ მთელ მნიშვნელობაზე: $|P(x_1)-P(x_0)|=2011$ (რადგან $P(x_0)=0$) $|P(x_2)-P(x_0)|=2011$ $|P(x_3)-P(x_0)|=2011$ $|P(x_4)-P(x_0)|=2011$ და $|P(x_5)-P(x_0)|=2011$

ვთქვათ, ~~$P(x_1)=a_nx_1^n+a_{n-1}x_1^{n-1}+\dots+a_1x_1+a_0$~~

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_n$ მთელი რიცხვებია ($P(x)$-პოლინომია)

მაშინ: $P(x_1)-P(x_0)=a_nx_1^n+a_{n-1}x_1^{n-1}+a_{n-2}x_1^{n-2}+\dots+a_1x_1+a_0-a_nx_0^n-a_{n-1}x_0^{n-1}-\dots-a_1x_0-a_0=$

$=a_n(x_1^n-x_0^n)+a_{n-1}(x_1^{n-1}-x_0^{n-1})+\dots+a_1(x_1-x_0)+a_0-a_0=a_n(x_1^n-x_0^n)+a_{n-1}(x_1^{n-1}-x_0^{n-1})+\dots+a_1(x_1-x_0)$

ცნობილია რადგან $a^y-b^y=(a-b)(a^{y-1}+a^{y-2}b+\dots+ab^{y-2}+b^{y-1}) \vdots a-b$. ამიტომ

$a^y-b^y \vdots a-b$. თუ a და b მთელი რიცხვებია. ამიტომ $P(x_1)-P(x_0)=a_n(x_1^n-x_0^n)+a_{n-1}(x_1^{n-1}-x_0^{n-1})+\dots+a_1(x_1-x_0)$

ცნობილი ამ ჯამის ყოველი შესაკრები იყოფა x_1-x_0 რადგან ყოველი შესაკრები შეიცავს $x_1^k-x_0^k$ სადაც k მთელია და n-დან 1-მდე ცნობილი რადგან $x_1^k-x_0^k \vdots x_1-x_0$ მაშინ ეს ჯამი იყოფა x_1-x_0. თუ შევადარებთ ჩვენ $P(x_1)-P(x_0)$ იყოფა x_1-x_0 ანალოგიურად შეგვიძლია ვთქვათ: $P(x_2)-P(x_0) \vdots x_2-x_0$, $P(x_3)-P(x_0) \vdots x_3-x_0$

$P(x_4)-P(x_0) \vdots x_4-x_0$ და $P(x_5)-P(x_0) \vdots x_5-x_0$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 023

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

ხოლო თუკი $|P(x_1)|=|P(x_2)|=|P(x_3)|=|P(x_4)|=|P(x_5)|=2011$ და $P(x_0)=0$.

მაშინ $|P(x_1)-P(x_0)|=2011 \vdots x_1-x_0$, $|P(x_2)-P(x_0)|=2011 \vdots x_2-x_0$, ~~$|P(x_5)-P(x_0)|=2011 \vdots x_5-x_0$~~ $|P(x_3)-P(x_0)|=2011 \vdots x_3-x_0$, $|P(x_4)-P(x_0)|=2011 \vdots x_4-x_0$ და $|P(x_5)-P(x_0)|=2011 \vdots x_5-x_0$.

ანუ ჩვენ მივიღეთ რომ: $2011 \vdots x_1-x_0$, $2011 \vdots x_2-x_0$, ..., $2011 \vdots x_5-x_0$.

ხოლო თუკი x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 და x_5 მთელებია და x_1, x_2, x_3, x_4 და x_5 წყვილ-წყვილად განსხვავებული მაშინ რიცხვები: x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0 და x_5-x_0 იქნება მთელები და იქნება წყვილ-წყვილად განსხვავებული. ხოლო თუკი ხუთივე მათგანი უყოფს 2011-ს, რომ 2011-ს ჰყავს 5 განსხვავებული მთელი გამყოფი, მაშინ ვიღებთ სისულელეს. ხოლო თუკი 2011 მარტივია, მთელი გამყოფები რიცხვს არ აქვს, -2011, -1, 1 და 2011 და სხვა მთელი გამყოფები 2011-ს ჰყავს 5 განსხვავებული მთელი გამყოფი, ანუ მივიღეთ რომ სისულე მაშინ ჩვენი დაშვება რომ არის ~~...~~ არის არის არსებობს ისეთი მთელი x_0 რომ $P(x_0)=0$.

რ.დ.გ.