შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 009

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$x^3+y^3+z^3=2011^{2011}$.

განვიხილოთ x^3-ის 9-ზე გაყოფის მიღებული ნაშთები.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8

მივიღეთ რომ x^3 9-ზე გაყოფის ნაშთად გვაძლევს 0; 1 ან 8-ს.

ახლა ვნახოთ 2011^{2011}-ის 9-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი.

$$\begin{array}{r|l} -2011 & 9 \\ \underline{18} & 223 \\ -21 & \\ \underline{18} & \\ -31 & \\ \underline{27} & \\ 4 & \end{array}$$

ნაშთი მივიღეთ 4. ანუ $2011^{2011} \equiv 4^{2011} \pmod 9$

$4^{2011} = 64^{670} \cdot 4$.

$64^{670} \equiv 1 \mod 9$ რადგან $64 \equiv 1 \mod 9$

$64^{670} \cdot 4 \equiv 4 \pmod 9$

ანუ $2011^{2011} \equiv 4 \mod (9)$

$x^3+y^3+z^3=2011^{2011}$ ანუ $x^3+y^3+z^3$-ის 9-ზე გაყოფის მიღებული ნაშთი უნდა იყოს 4-ი.

x^3-ის არის 0, 1, 8

თუ x^3 გვაძლევს 0-ს.

y^3+z^3 შეიძლება მოგვცეს 0, 1, 2, 7; 8 ანუ 4-ს ვერ მივიღებთ.

თუ x^3 გვაძლევს 1

y^3+z^3 შეიძლება მოგვცეს 0, 1, 2, 7; 8 ანუ $x^3+y^3+z^3$ შეიძლება მოგვცეს

1, 2; 3; 8; 0

x^3 გვაძლევს 8-ს.

y^3+z^3 — 0; 1; 2; 7; 8

$x^3+y^3+z^3$ — 8; 0; 1; 6; 7. ანუ $x^3+y^3+z^3 \equiv 4 \pmod 9$ არც x, y, z-ს არსებობს. ანუ $x^3+y^3+z^3=2011^{2011}$ ამოხსნები არ აქვს. რ.ს.დ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

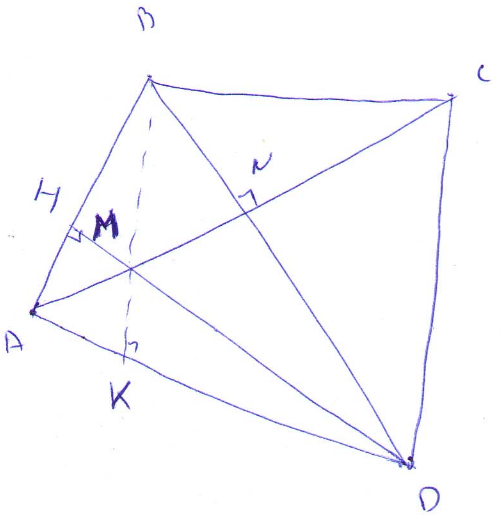
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 009

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



$AC \perp BD$

$\angle A + \angle C = 180°$

$\frac{AM}{MN} = a$

ΔABD-ში AN არის A-დან დაშვებული სიმაღლე ხოლო DH – D-დან დაშვებული
ანუ M არის ორთოცენტრი.

რადგან $(\angle BKD)$ $\angle BKA = \angle ANB$ და ორივე AB მონაკვეთს
ეყრდნობა ამიტომ $AKNB$ ჩაიხაზება. ანუ $\angle NAK = \angle KBN$
პირობიდან $ABCD$ ჩაიხაზება ანუ $\cancel{\angle KB}$ $\angle CAD = \angle DBC$
$\angle CAD = \angle NAK = \angle KBD = \angle DBC$. $\angle KBD = \angle KBN$.
ანუ ΔMBC-ში BN ბისექტრისაც და არის სიმაღლეც ანუ $MN = NC \Rightarrow$
$\Rightarrow 2MN = MC$

$$\frac{AM}{MN} = a \Rightarrow \frac{AM}{2MN} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2MN}{AM} = \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{2}{a} \Rightarrow \cancel{\frac{AM}{MC} = \frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{AM} + 1 = \frac{a}{2} + 1$$

$$\frac{AC}{AM} = \frac{a+2}{a} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{a}{a+2}$$

პ/ს: $\frac{AM}{AC} = \frac{a}{a+2}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 009

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

[illegible] $|P(x)|$ [illegible] 2011 [illegible]
$P(x)$ [illegible] 3-[illegible] 2011-[illegible] [illegible] 2011-[illegible] ~~[illegible]~~
[illegible] $P(x_1)=P(x_2)=P(x_3)=2011$.
[illegible] x [illegible] $P(x)=0$ $x\in\mathbb{Z}$

$P(x_1)-P(x)=2011.$ [illegible] 2011-[illegible]
$P(x_2)-P(x)=2011.$ [illegible]
$P(x_3)-P(x)=2011.$

~~[illegible]~~ ~~$(P(x_1)-P(x)\,\vdots\,(x_1-x))$~~

$P(x_1)-P(x)=a_n(x_1^n-x^n)+a_{n-1}(x_1^{n-1}-x^{n-1})+\dots+a_1(x_1-x)=$

$=(x_1-x)\cdot A.$

$P(x_2)-P(x)=(x_2-x)\cdot B$

$P(x_3)-P(x)=(x_3-x)\,C.$

$P(x_1)-P(x)=(x_1-x)\cdot A=2011.$
$P(x_2)-P(x)=(x_2-x)\cdot B=2011.$
$P(x_3)-P(x)=(x_3-x)\cdot C=2011.$

[illegible] ~~$x_1-x;\ x_2-x$~~
[illegible] $x_1;x_2;x_3;x$ [illegible] A,B,C [illegible]

$(x_1-x)\cdot A=2011 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1-x=1 \\ \cancel{A=1}\quad x_1-x=2011 \end{array}\right.$

$(x_2-x)\,B=2011 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_2-x=1 \\ x_2-x=2011 \end{array}\right.$

$(x_3-x)\,C=2011 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3-x=1 \\ x_3-x=2011 \end{array}\right.$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 009

ამოცანა № 3

გვერდი № 2.

ანუ $x_1 - x = \left[\begin{array}{l}1\\2011\end{array}\right.$

$x_2 - x = \left[\begin{array}{l}1\\2011\end{array}\right.$

$x_3 - x = \left[\begin{array}{l}1\\2011.\end{array}\right.$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] სამ x_1-x; x_2-x; x_3-x სხვადასხვა [illegible] [illegible] [illegible] ან x_1; x_2; x_3 [illegible] [illegible] [illegible] ტოლი. ეს ეწინააღმდეგება პირობას. ანუ [illegible] $P(x)=0$ $x\in\mathbb{Z}$ მცდარია. ანუ არ არსებობს $x\in\mathbb{Z}$ ისეთი რომ $P(x)=0$

რ.ნ.დ.