შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 0/3

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

განვიხილოთ ნებ. რიცხვის კუბის 9-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები.

a	a^3 (mod 9)
0	0
1	1
2	8
3	0
4	1
5	8
6	0
7	1
8	8

მივიღეთ რომ ნებ. რიცხვის კუბი 9-ზე გაყოფისას ნაშთად გვაძლევს 0-ს 1-ს და 8-ს.

$2011 = 2007 + 4 \equiv 4 \pmod 9$.

$4^1 \equiv 4 \pmod 9$

$4^2 \equiv 7 \pmod 9$

$4^3 \equiv 1 \pmod 9$

$4^4 \equiv 4 \pmod 9$

$4^5 \equiv 7 \pmod 9$

$\vdots$

$4^{3k+1} \equiv 4 \pmod 9$

$4^{3k+2} \equiv 7 \pmod 9$

$4^{3k+3} \equiv 1 \pmod 9$

$\vdots$

$4^{2011} \equiv 4^{2010} \cdot 4 \equiv 4 \equiv 2011^{2011} \pmod 9$.

მივიღეთ რომ $2011^{2011} \equiv 4 \pmod 9$.

$x^3 + y^3 + z^3 = 2011^{2011} \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \equiv 4 \pmod 9$.

ვაჩვენოთ რომ სამი რიცხვის კუბების ჯამი 9-ზე გაყოფისას ნაშთად ვერ მოგვცემს 4-ს.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 013

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

$x^3 \equiv 0; 1; 8 \pmod 9$ $\quad y^3 \equiv 0; 1; 8 \pmod 9$ $\quad z^3 \equiv 0; 1; 8 \pmod 9$.

ამოვწეროთ ყველა ვარიანტი ამ რიცხვების ჯამის 9-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთის.

$x^3+y^3+z^3 \equiv 0; 1; 2; 3; 6; 7; 8 \pmod 9$.

ხედავთ ამ ვარიანტებს შორის არ ურევია 4 ანუ ტოლობა ასეთი არ შეიძლება.

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

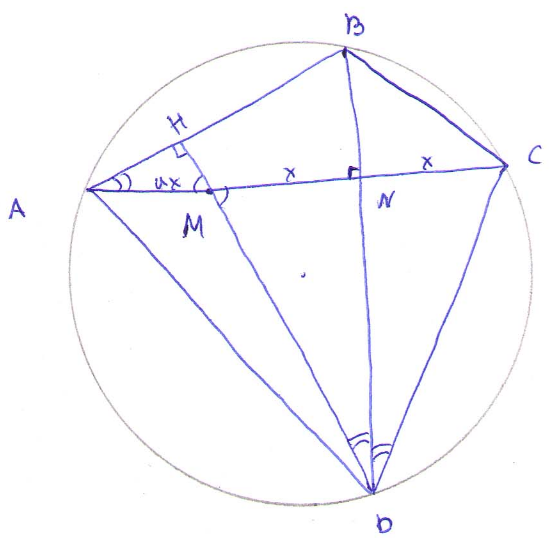
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 013

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



$AM : MN = \alpha$.

ვ.პ. $AM : AC$.

$MN = x \Rightarrow AM = \alpha \cdot x$

$\angle AMH = \angle DMN$ რადგანაც ვერტიკალური კუთხეები არიან.

$\angle AHM = \angle MND = 90^\circ \Rightarrow \angle HAM = \angle MDN$

$\angle HAM = \angle BAC = \angle BDC$ რადგანაც საერთო $\breve{BC}$ ეყრდნობიან.

მივიღეთ რომ $\angle HAM = \angle MDN = \angle NDC$ და $\angle MND = \angle CND = 90^\circ$

$\triangle MCD$-ში სიმაღლე და ბისექტრისა ერთმანეთს ემთხვევა ანუ ეს სამკუთხედი ტოლფერდაა $\Rightarrow$

$\Rightarrow ND$ ამ ტოლფერდა სამკუთხედში მედიანაც იქნება. $\Rightarrow MN = NC = x$.

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AM}{AM+MN+NC} = \frac{\alpha x}{\alpha x + x + x} = \frac{\alpha x}{x(\alpha+2)} = \frac{\alpha}{\alpha+2}.$$

პასუხი: $AM : AC = \dfrac{\alpha}{\alpha+2}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №		16.04.2011/ მათ/ I/ 013

ამოცანა № 3   გვერდი № 1

დავუშვათ რომ ეს პოლინომი x_1; x_2; x_3; x_4; და x_5 მნიშვნელობებისთვის ღებულობს აბსოლუტურ მნიშვნელობას 2011-ს.

დავუშვათ რომ ეს პოლინომი y-ისთვის ღებულობს მნიშვნელობას 0-ს. ანუ $P(y)=0$.

დავამტკიცოთ რომ ნებისმიერი q და r რიცხვებისთვის $P(q)-P(r) \vdots q-r$-ზე.

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\dots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$$

$$\left.\begin{aligned}P(q)&=a_n\cdot q^n+a_{n-1}\cdot q^{n-1}+\dots+a_2q^2+a_1q^1+a_0\\ P(r)&=a_n\cdot r^n+a_{n-1}\cdot r^{n-1}+\dots+a_2\cdot r^2+a_1r+a_0\end{aligned}\right) \Rightarrow P(q)-P(r)=a_n(q^n-r^n)+a_{n-1}(q^{n-1}-r^{n-1})\dots$$

$$\dots+a_2(q^2-r^2)+a_1(q-r)$$

რადგან ვიცით b^m-c^m იყოფა $b-c$-ზე ორი ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.

$$P(q)-P(r)=\underset{\vdots\; q-r}{a_n(q^n-r^n)}+\underset{\vdots\; q-r}{a_{n-1}(q^{n-1}-r^{n-1})}\dots\underset{\vdots\; q-r}{a_2(q^2-r^2)}+\underset{\vdots\; q-r}{a_1(q-r)} \Rightarrow P(q)-P(r)\vdots q-r\text{-ზე}$$

ამ დამტკიცების შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ რომ:

$P(x_1)-P(y)\vdots x_1-y$-ზე $\Rightarrow$ $P(x_1)\vdots x_1-y$-ზე

$P(x_2)-P(y)\vdots x_2-y$-ზე $\Rightarrow$ $P(x_2)\vdots x_2-y$-ზე

$P(x_3)-P(y)\vdots x_3-y$ $\Rightarrow$ $P(x_3)\vdots x_3-y$-ზე

$P(x_4)-P(y)\vdots x_4-y$ $\Rightarrow$ $P(x_4)\vdots x_4-y$-ზე

$P(x_5)-P(y)\vdots x_5-y$ $\quad$ $P(x_5)\vdots x_5-y$-ზე

$P(x_1), P(x_2)\dots P(x_5)$ არის 2011 ან -2011 ამ რიცხვს კი აქვს 4 გამყოფი 1; 2011; -1 და -2011. ჩვენ კი მივიღეთ რომ მათ აქვთ ხუთი გამყოფი ანუ რომელიღაც $x_i-y=x_k-y \Rightarrow x_i=x_k$ რაც ეწინააღმდეგება პირობას ნათქვამია რომ 5-ივე მნიშვნელობა განსხვავებულია ამიტომ ჩვენი დაშვება არასწორია, ანუ $P(y)\neq 0$.

რ.დ.გ.