შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 011

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

ნებისმიერი a^3 7-ზე გაყოფისას ნაშთად იძლევა ან 1-ს ან -1-ს ან 0-ს.

დამტკიცება: $(7k+1)^3$ იძლევა 1-ს.

$(7k+2)^3 = 7(\sim) + 8$, იძლევა 1-ს

$(7k+3)^3 = 7(\sim) + 27 = 7(\sim) + 6$, იძლევა -1-ს

$(7k+4)^3 = 7(\sim) + 64$, იძლევა 1-ს.

$(7k+5)^3 = 7(\sim) + 125$, იძლევა -1-ს.

$(7k+6)^3 = 7(\sim) + 216$, იძლევა -1-ს.

$(7k)^3$ იძლევა 0-ს.

$(2011)^{2011}$ 7-ზე გაყოფისას იძლევა იგივე ნაშთს, რასაც 2^{2011}, ანუ $(2^3)^{670}\cdot 2$, ანუ 2-ს.

$(x^3+y^3+z^3) \equiv 2 \pmod 7$.

შესაბამისად ერთადერთი ვარიანტია, როცა x,y,z-დან 2 იძლევა ნაშთს 1-ს და მესამე იყოფა 7-ზე. ანუ x,y,z-დან 1-1 იყოფა 7-ზე.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

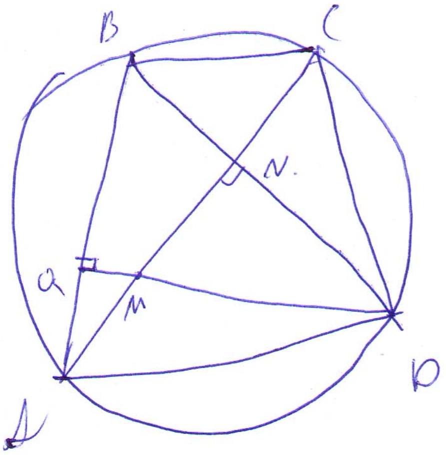
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 011

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



$AM : MN = a.$

AQND ჩაწერილია, ანუ

$AM \cdot MN = QM \cdot MD.$ და

$BQ \cdot AB = BN \cdot BD.$

M არის ABD სამკუთხედის სიმაღლეების კვეთის წერტილი.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	16.04.2011/ მათ/ I/ 011

ამოცანა № 3 | გვერდი № 1

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_1 x + a_0$

$|P(l_1)| = |P(l_2)| = |P(l_3)| = |P(l_4)| = |P(l_5)| = 2011.$

ამ ხუთიდან [illegible] 3 ცალი, რომ [illegible] [illegible] ნიშნის. [illegible] [illegible], [illegible] [illegible].

$a_n l_1^n + a_{n-1} l_1^{n-1} + \dots a_1 l_1 + a_0 =$

$= a_n l_2^n + a_{n-1} l_2^{n-2} + \dots a_1 l_2 + a_0 = a_n l_3^n + a_{n-1} l_3^{n-1} + \dots + a_1 l_3 + a_0.$

ნაწილ-ნაწილ გამოვაკლოთ ერთმანეთს:

$a_n(l_1^n - l_2^n) + \dots + a_1(l_1 - l_2) = 0$

$a_n(l_1^n - l_3^n) + \dots + a_1(l_1 - l_3) = 0$

$a_n(l_2^n - l_3^n) + \dots + a_1(l_2 - l_3) = 0.$

რადგან $l_1 \neq l_2 \neq l_3$

გავყოფთ

$a_n(l_1^{n-1} + l_1^{n-1} l_2 + \dots + l_2^{n-1}) + \dots + a_1 = 0$

$a_n(l_1^{n-1} \dots + \dots + l_3^{n-1}) + \dots + a_1 = 0$

$a_n(l_2^{n-1} + \dots + l_2^{n-1}) + \dots + a_1 = 0.$

ახლა ნაწილ-ნაწილ გამოვაკლოთ და [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].
და [illegible] [illegible] n [illegible] 2 [illegible].

$a_n(L) + a_{n-1} = 0.$

L არის l_1, l_2, l_3-ის [illegible], ანუ [illegible].

$L = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, ანუ $(a_{n-1}) \vdots (a_n)$.

[illegible] [illegible] a_{n-L} [illegible]

ასევე [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $\sqrt{a_{n-2} : a_n}$
$a_1 : a_n$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

16.04.2011/ მათ/ I/ 011

ამოცანა № 3

გვერდი № 2.

თუ $|a_1| \dots |a_{n-1}|$ ყველა იყოფა $|a_n|$-ზე.

დავუშვათ საწინააღმდეგო: არის მთელი რიცხვი t, რომ $P(t)=0$ და $t \in \mathbb{Z}$, მაშ.

$$a_n(t^n + b_{n-1}t^{n-1} \dots \dots + b_1 t) + a_0 = 0.$$

სადაც $b_1 \dots b_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

ე.ი. $|a_0|$-იც იყოფა $|a_n|$-ზე.

და რადგან 2011 მარტივია, ~~a_n 2011~~. და ამიტომ შეიძლება 2011-ის ტოლი იყოს, ე.ი. $a_n = 2011$.

~~[illegible]~~ მაშინ ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 2011-ზე ნაშთად 1-ზე.

~~[illegible]~~

და ეს 5-ზე [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ ± 1, ± 1, [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. fail.