1. ვთქვათ, მოცემულია $f: R \to R$ ფუნქცია (R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა) და ცნობილია, რომ ყოველი
$x, y \in R$ რიცხვებისთვის სრულდება უტოლობა:

$$f(x) + f(y) \geq 2f(x+y).$$

დაამტკიცეთ, რომ ყოველი $x, y, z \in R$ რიცხვებისთვის შესრულდება უტოლობა:

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f(x+y+z).$$

ამოხსნა

გვაქვს

$$f(x) + f(y) + 2f(z) \geq 2f(x+y) + 2f(z) \geq 4f(x+y+z);$$

ანალოგიურად

$$f(y) + f(z) + 2f(x) \geq 2f(y+z) + 2f(x) \geq 4f(x+y+z);$$

და

$$f(x) + f(z) + 2f(y) \geq 2f(x+z) + 2f(y) \geq 4f(x+y+z).$$

მიღებული უტოლობების შეკრებით გვექნება

$$4f(x) + 4f(y) + 4f(z) \geq 12f(x+y+z),$$

საიდანაც ვიღებთ

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f(x+y+z).$$

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $f(x) + f(y) + 2f(z) \geq 2f(x+y) + 2f(z)$;

ბ) დაადგინა, რომ $f(y) + f(z) + 2f(x) \geq 4f(x+y+z)$;

გ) დაადგინა $f(y) + f(z) + 2f(x) \geq 4f(x+y+z)$ და
$f(x) + f(z) + 2f(y) \geq 4f(x+y+z)$ უტოლობებიც ,

დ) დაადგინა, რომ $4f(x) + 4f(y) + 4f(z) \geq 12f(x+y+z)$

ე) მიიღო დასამტკიცებელი უტოლობა

შეფასების სქემა

1ქ – ა)
2ქ – ბ)
4ქ – ბ), გ)
6ქ – ბ) , გ), დ)
7ქ – ბ) , გ), დ), ე)

2. ტრაპეციის ფართობია 50, ხოლო დიაგონალების ჯამია 20. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.

ამოხსნა

ვთქვათ ტრაპეციის დიაგონალებია d_1 და d_2 ხოლო მათ შორის კუთხეა α. აღვნიშნოთ ტრაპეციის ფართობი S -ით. გვექნებ

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha.$$

შევაფასოთ $d_1 d_2$ ნამრავლი ზემოდან. ამისათვის დავწეროთ ჭეშმარიტი უტოლობა $\left(\frac{d_1-d_2}{2}\right)^2 \geq 0$. დავუმატოთ ამ უტოლობას ორივე მხარეს $d_1 d_2$. მივიღებთ $d_1 d_2 \leq \left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2$. აქვე შევნიშნოთ , რომ ეს უტოლობა ტოლობად გადაიქცევა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $d_1 = d_2$. ამრიგად გვაქვს

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha \leq \frac{1}{2}\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2 \sin\alpha \leq \frac{(d_1+d_2)^2}{8} = 50.$$

აქედან გამომდინარეობს რომ უტოლობათა ჯაჭვში ყველგან გვაქვს ტოლობები ანუ $\sin\alpha = 1$ და $d_1 = d_2$ ანუ $\alpha = 90°$ და $d_1 = d_2 = 10.$
ადვილი დასანახია, რომ ტრაპეციის სიმაღლე ტოლი იქნება იმ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის სიმაღლისა, რომლის კათეტია 10. ვღებულობთ რომ ასეთი სამკუთხედი ჰიპოტენუზა ტოლი $10\sqrt{2}$ და შესაბამისად სიმაღლე h ტოლია $h = \frac{100}{10\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.
პასუხი: $5\sqrt{2}$

ამოხსნის ეტაპები

ა) ჩაწერა $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$ ან სხვა ფორმით და მიხვდა სიდიდეთა ზემოდან შეაფასების
აუცილებლობას, მაგალითად შეაფასა $d_1 d_2$ ზემოდან ;
ბ) შენიშნა შემდეგი უტოლობათა ჯაჭვი $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha \leq \frac{1}{2}\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2 \sin\alpha \leq \frac{(d_1+d_2)^2}{8} = 50$;
გ) დაადგინა $d_1 = d_2$ და $\alpha = 90°$;
დ) შენიშნა, რომ ტრაპეციის სიმაღლე ტოლია ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის სიმაღლისა კათეტით 10;
ე) მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

2ქ – ა)
4ქ – ბ)
6ქ – გ), დ)
7ქ – გ), ე)

3. განიხილება 2011-ზე ნაკლები დადებითი მთელი რიცხვებისგან შედგენილი ყველა დალაგებული სამეულები (a,b,c), ისეთი რომ $a+b+c$ იყოფა როგორც a –ზე, ასევე b-ზე და c-ზე. იპოვეთ ასეთი სამეულების რაოდენობა. (დალაგებული სამეული ნიშნავს იმას, რომ ამ სამეულში დალაგებას მნიშვნელობა აქვს ანუ მაგალითად სამეული $(2,4,5)$, განსხვავდება სამეულისგან $(4,2,5)$).

ამოხსნა

ჯერ ვიპოვოთ ისეთი სამეულების რაოდენობა, რომ $a \le b \le c$ და $a+b+c$ იყოფა a –ზე, b -ზე და c -ზე. რადგანაც $a+b+c$ იყოფა c -ზე ამიტომ $a+b$ -ც იყოფა c -ზე. და რადგანაც $0 < a+b \le 2c$ გვექნება, რომ $a+b=2c$ ან $a+b=c$.

თუ $a+b=2c$ მაშინ ვღებულობთ $a=b=c$. და პირიქით, ყოველი დადებითი მთელი k–სთვის, $k < 2011$, (k,k,k) აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს. ამრიგად (k,k,k) ტიპის სამეულები გვაქვს 2010 ცალი.

ვთქვათ ახლა $a+b=c$. ვინაიდან $2c=a+b+c$ იყოფა როგორც a -ზე ასევე b -ზე ამიტომ $a=\frac{2c}{m}$ და $b=\frac{2c}{n}$ რაიმე დადებითი მთელი m და n რიცხვებისათვის. $a+b=c$ პირობა გვაძლევს ტოლობას $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$. ვინაიდან $a \le b$, ამიტომ $\frac{1}{m} \le \frac{1}{n}$ რაც თავის მხრივ გვაძლევს შეფასებას $\frac{1}{2}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \le \frac{2}{n}$ ანუ გვაქვს $n \le 4$.

თუ $n=4$ მაშინ $m=4$ და ვღებულობთ $a=b=\frac{c}{2}$ ე.ი. მივიღეთ სამეული $(a,a,2a)$. პირიქით, ყოველი დადებითი მთელი k –სთვის, სადაც $2k < 2011$, $(k,k,2k)$ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს. ამრიგად ამ შემთხვევაში გვაქვს 1005 ცალი სამეული და თუ გავითვალისწინებთ დალაგების რიგსაც მივიღებთ რომ იმ სამეულების რაოდენობა სადაც ზუსტად ორი რიცხვია ერთმანეთის ტოლი, არის $3 \cdot 1005 = 3015$.

თუ $n=4$, გვაქვს $m=6$ და ვღებულობთ $a=\frac{c}{3}$ $b=\frac{2c}{3}$, ანუ $b=2a$, $c=3a$. და პირიქით, ყოველი სამეული $(k,2k,3k)$), სადაც $3k < 2011$, აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს. ამრიგად ამ შემთხვევაში გვაქვს $2010/3=670$ ცალი სამეული და დალაგების რიგსაც თუ გავითვალისწინებთ მივიღებთ, რომ იმ სამეულების რაოდენობა სადაც ყველა რიცხვი განსხვავებულია, ტოლია $6 \cdot 670 = 4020$.

თუ $n \le 2$ მაშინ $\frac{1}{m} \le 0$ რაც შეუძლებელია.

ამრიგად საბოლოო პასუხია $2010+3015+4020=9045$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაალაგა a, b, c არაკლების მიხედვით და აჩვენა , რომ რომ $a + b = 2c$ ან $a + b = c$;

ბ) იპოვა (k, k, k) ტიპის სამეულების რაოდენობა;

გ) იპოვა, რომ $(k, k, 2k)$ ტიპის სამეულები წარმოადგენენ ამოცანის ამონახსნს k-ს გარკვეული მნიშვნელობებისათვის და დათვალა მათი რაოდენობა;

დ) იპოვა, რომ $(k, 2k, 3k)$ ტიპის სამეულებიც ამოცანის ამონახსნია გარკვეული k-სთვის და დათვალა მათი რაოდენობა;

ე) აჩვენა, რომ ზემოთ ჩამოთვლილ სამეულების გარდა ამოცანას სხვა ამონახსნი არ გააჩნია;

ვ) ჩაწერა საბოლოო პასუხი.

შეფასების სქემა

1ქ –ბ);
2ქ – დ), გ);
3ქ – ა);
4ქ – ა) და ე);
6ქ – ა) და გ) და დ) და ე);
7ქ – ა) და გ) და დ) და ე) და ვ).