1. დაამტკიცეთ, რომ $x^3 + y^3 + z^3 = 2011^{2011}$ განტოლებას არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

ამოხსნა

დავუშვათ, რომ არსებობს x, y და z ნატურალურ რიცხვთა სამეული, რომლისთვისაც $x^3 + y^3 + z^3 = 2011^{2011}$. შევნიშნოთ, რომ $2011 \equiv 4 (\bmod 9)$. შესაბამისად $2011^2 \equiv 7 (\bmod 9)$, $2011^3 \equiv 1 (\bmod 9)$ და $2011^4 \equiv 4 (\bmod 9)$. აქედან, ვინაიდან $2011 = 3 \cdot 670 + 1$, ვასკვნით, რომ $2011^{2011} \equiv 4 (\bmod 9)$.

ახლა ვთქვათ x ნატურალური რიცხვია. მაშინ ცხადია, რომ $x = 3k$ ($k = 1, 2, \ldots$), ან $x = 3k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), ან $x = 3k + 2$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). ამიტომ გვექნება შემდეგი შემთხვევები: $x^3 \equiv 0 (\bmod 9)$, ან $x^3 \equiv 1 (\bmod 9)$, ან $x^3 \equiv 8 (\bmod 9)$.

ამრიგად $x^3 + y^3 + z^3$ გამოსახულება 9–ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს იგივე რიცხვს, რასაც 9–ზე გაყოფისას ნაშთში მოგვცემს $r_1 + r_2 + r_3$ რიცხვი, სადაც r_i არის 0, 1 ან 8. მაგრამ $r_1 + r_2 + r_3$ რიცხვის 9–ზე გაყოფისას ნაშთში მიიღება 0, ან 1, ან 2, ან 3, ან 6, ან 7, ან 8, ე. ი. ნაშთში 4 არასოდეს არ მიიღება, რაც ეწინააღმდეგება ნატურალური რიცხვებისათვის $x^3 + y^3 + z^3 = 2011^{2011}$ ტოლობის შესაძლებლობას.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $2011 \equiv 4 (\bmod 9)$;

ბ) დაადგინა, რომ $2011^{2011} \equiv 4 (\bmod 9)$;

გ) დაადგინა, რომ $x^3 \equiv 0 (\bmod 9)$, ან $x^3 \equiv 1 (\bmod 9)$, ან $x^3 \equiv 8 (\bmod 9)$;

დ) დაადგინა, რომ $x^3 + y^3 + z^3$ გამოსახულება 9–ზე გაყოფისას ნაშთში

გვაძლევს იგივე რიცხვს, რასაც 9–ზე გაყოფისას ნაშთში მოგვცემს $r_1 + r_2 + r_3$

რიცხვი, სადაც r_i არის 0, 1 ან 8;

ე) დაადგინა, რომ $r_1 + r_2 + r_3$ რიცხვის 9–ზე გაყოფისას ნაშთში მიიღება 0, ან 1, ან

2, ან 3, ან 6, ან 7, ან 8;

ვ) გააკეთა დასკვნა.

შეფასების სქემა

1ქ – ა) ან გ)

2ქ – ბ) ან დ)

3ქ – ბ), გ)

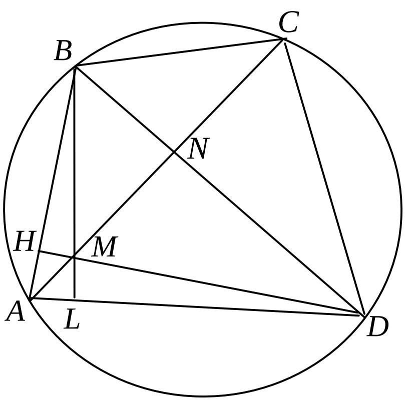
4ქ – ბ) , დ)

6ქ – ბ), დ), ე)

7ქ – ბ), დ), ე), ვ)

2. $ABCD$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში. AC და BD დიაგონალები მართობულია და იკვეთება N წერტილში. ABD სამკუთხედის DH სიმაღლე AC დიაგონალს კვეთს M წერტილში. ცნობილია, რომ $AM:MN=a$. იპოვეთ $AM:AC$.

ამოხსნა



გავაგრძელოთ BM მონაკვეთი AD გვერდთან გადაკვეთამდე L წერტილში. ვინაიდან $AN \perp BD$ და $DH \perp AB$, ამიტომ M არის ABD სამკუთხედის სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი. ამიტომ BL−იც იქნება სიმაღლე.

ვთქვათ $\angle BMC=\alpha$. მაშინ $\angle AML=\alpha$. $\angle MLA=90^\circ$, ამიტომ $\angle MAL=90^\circ-\alpha$.

გვაქვს $\angle CBD=\angle CAD=\angle MAL=90^\circ-\alpha$. ვინაიდან $\angle BNC=90^\circ$, ამიტომ $\angle BCN=90^\circ-\angle CBN=90^\circ-\angle CBD=90^\circ-(90^\circ-\alpha)=\alpha$. ამრიგად $\angle BMC=\angle BCM$, ე. ი. $\triangle BMC$ ტოლფერდაა. მაშინ MC ფუძეზე დაშვებული BN სიმაღლე იქნება მედიანაც, ე. ი. $MN=NC$. ამიტომ $AM:AC=AM:(AM+2MN)=\dfrac{a}{a+2}$

პასუხი: $\dfrac{a}{a+2}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გააგრძელა BM მონაკვეთი AD გვერდთან გადაკვეთამდე;

ბ) დაადგინა, რომ BL იქნება სიმაღლე;

გ) დაადგინა, რომ $\angle CBD = \angle CAD$;

დ) დაადგინა, რომ $\angle CBD = 90^{\circ} - \alpha$;

ე) დაადგინა, რომ $\angle BMC = \angle BCM$;

ვ) დაადგინა, რომ $MN = NC$;

ზ) მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1ქ – ა)

2ქ – ა) , ბ)

3ქ – ა), ბ), გ)

4ქ – ა), ბ), გ), დ)

5ქ – ა), ბ), გ), დ), ე)

6ქ – ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7ქ – ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

3. მოცემულია მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომი x ცვლადის მიმართ, რომელიც x-ის ხუთი განსხვავებული მთელი მნიშვნელობისათვის ღებულობს აბსოლუტური სიდიდით 2011-ის ტოლ მნიშვნელობას. დაამტკიცეთ, რომ ამ პოლინომს არ შეიძლება ჰქონდეს მთელი ფესვი (ანუ ფესვი რომელიც მთელი რიცხვია).

ამოხსნა

ვთქვათ $f(x)$ მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომია ხოლო x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ისეთი ხუთი განსხვავებული მთელი რიცხვებია, რომ $|f(x_1)| = |f(x_2)| = |f(x_3)| = |f(x_4)| = |f(x_5)| = 2011.$ დავუშვათ, რომ a არის მთელი რიცხვი რომელიც არის $f(x)$ პოლინომის ფესვი. გვაქვს $f(x) = (x-a)g(x)$ სადაც $g(x)$ მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომია.

ამრიგად $|f(x_1)| = |(x_1 - a)g(x_1)| = 2011$ საიდანაც გამომდინარეობს რომ $|x_1 - a|$-არის მთელი რიცხვი რომელიც ჰყოფს 2011. რადგანაც 2011 მარტივია ამიტომ აქედან ვღებულობთ, რომ $|x_1 - a| = 1$ ან $|x_1 - a|$=2011. ანლოგიურად, მივიღებთ, რომ $|x_i - a| = 1$ ან $|x_i - a|$=2011, $2 \le i \le 5.$

აქედან კი გამომდინარეობს რომ შემდეგი რიცხვებიდან $x_1 - a$, $x_2 - a$, $x_3 - a$, $x_4 - a$, $x_5 - a$ ორი მაინც ერთმანეთის ტოლია, რაც თავის მხრივ ნიშნავს რომ რომელიმე ორი x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 რიცხვთაგან ერთმანეთის ტოლია.

მივიღეთ წინააღმდეგობა იმასთან, რომ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 რიცხვები განსხვავებულია. ამრიგად ჩვენი დაშვება, რომ პოლინომის ფესვი მთელი რიცხვია ყოფილა არასწორი. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოხსნის ეტაპები

ა) ჩაწერა $f(x) = (x-a)g(x)$ წარმოდგენა და აჩვენა (ან აღნიშნა), რომ $g(x)$ მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომია;

ბ) დაადგინა, რომ $|x_i - a| = 1$ ან $|x_i - a|$=2011, $1 \le i \le 5$;

გ) დაამტკიცა რომ $x_1 - a$, $x_2 - a$, $x_3 - a$, $x_4 - a$, $x_5 - a$

რიცხვებიდან ორი მაინც ერთმანეთის ტოლია;

დ) დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

2ქ – ა) ;

4ქ – ბ);

6ქ –გ);

7ქ –გ), დ).