მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 260

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

ცხადია, რომ თითოეულმა მონაწილემ ერთი ენა მაინც იცის.

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერ 4 კაცს მოვათავსებთ 2 ნომერში.

თუ ამ 4 კაციდან ყველა ყველას ესაუბრება მაშინ, ნებისმიერ 2-ს შევაწყვილებთ ერთ ოთახში, ხოლო დანარჩენ 2-ს შევაწყვილებთ მეორე ოთახში, და

თუ ამ 4 კაციდან მოიძებნა წყვილი, რომელიც ერთმანეთს ვერ ელაპარაკება და პირველი საუბრობს a_1-ენაზე, ხოლო მეორე a_2-ენაზე, მაშინ მესამე კაცმა პირობის თანახმად უნდა ისაუბროს a_1 და a_2 ენებზე, და ანალოგიურად 1; 2 და 4 კაცი რომ განვიხილოთ მეოთხე კაცმაც უნდა ისაუბროს a_1 და a_2 ენებზე, მაშინ დავაწყვილებთ 1 და 3 კაცს ისინი საუბრობენ a_1 ენაზე და დავაწყვილებთ 2 და 4 კაცს ისინი საუბრობენ a_2-ენაზე, მივიღეთ რომ ნებისმიერ 4 კაცს მოვათავსებთ 2 ოთახში. ეს 2012 კაცი დავყოთ 503 4-ეულად, თითოეულ 4-ეულს ვათავსებთ წყვილ-წყვილად 2-ოთახში, ანუ ცხადია, რომ ეს 2012 დელეგატი შევა 1006 ნომერში ისე, რომ ერთმანეთს ესაუბრებოდნენ.

ო.დ.ვ.

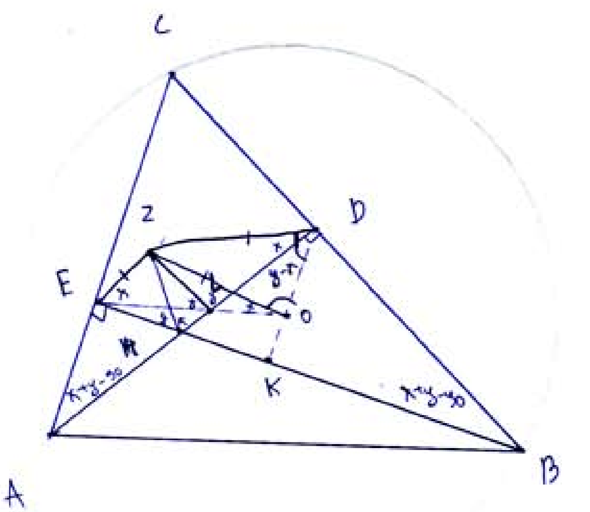
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	28.04.2012/ მათ/ III/ 260

ამოცანა № 2	გვერდი № 1



ჯერ ვაჩვენოთ KL და მართობული AB გვერდის შუაწერტილში და შუაწერტილს წრფეთა კვეთა M და ვაჩვენოთ, რომ AM=MB.

△ AHB-ში LK არის მკვეთი ამიტომ მენელაოსის თეორემის თანახმად

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BK}{KH}\cdot\frac{HL}{AL}=1$$ ვაჩვენოთ, რომ $\frac{BK}{KH}=\frac{AL}{HL}$ -თან

და ცხადია, რომ ამოცანა ამოხსნილი იქნება.

$\angle EHZ=y$, რადგან $HZDK$ ჩახაზულია, ამიტომ $\angle ZDK=180-y$.

$\angle EHZ=\angle ELZ=y$, რადგან $EHLZ$ ჩახაზულია $\Rightarrow$

$\Rightarrow LZDO$ არის ჩახაზული. მოცემულობის თანახმად

$OZ=DZ \Rightarrow \angle ZOD=y \Rightarrow \angle ZLD=y$.

$\angle ZEL=x \Rightarrow$ ~~∠LEH~~ $\angle LHZ=x$, რადგან $OZ=ZE \Rightarrow \angle EOZ=x$

$\Rightarrow \angle LOZ = x \Rightarrow \angle LDZ = x$

$\cancel{\angle ZEL = \angle ZDL}$

$\triangle ZEL$-ს და $\triangle ZDL$-ს ორი გვერდი ტოლი აქვთ და ამ გვერდთან მდებარე კუთხე ერთ გვერდთან საერთო $\Rightarrow \triangle ZEL = \triangle ZDL \Rightarrow EL = LD.$

$\angle ODL = y - x \Rightarrow \angle BDK = 90 - y + x$

$\cancel{\angle ELX = 180 - 2y}$

$\angle HEL = x + y$

$\angle DBH = \angle EAH = x + y - 90$, სიმეტრიით

$\angle EHD = x + y.$

$$\frac{BK}{KH} = \frac{BD}{DH} \cdot \frac{\sin(x+y-90)}{\sin(y-x)} \cdot \frac{\sin(90-y+x)}{\sin(y-x)} = \frac{BD}{DH} \cdot \cancel{ctg(\;-x)}\, tg(90-y+x) = ctg(x+y-90) \cdot tg(90-y+x)$$

$\triangle HEL$-ში.

$$\frac{HL}{EH} = \frac{HL}{EL} = \cancel{\sin(\;)}\,\frac{\sin(y-x)}{\sin(x+y)} \Rightarrow HL = \frac{EL \cdot \sin(y-x)}{\sin(x+y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AL}{LH} = \frac{AL \cdot \sin(x+y)}{EL \cdot \sin(y-x)}$$

ხოლოც მივიღეთ $EL = LD \Rightarrow \frac{AL}{EL} = \frac{AL}{LD} \Rightarrow \frac{AL}{LH} = \frac{AL}{LD} \cdot \frac{\sin(x+y)}{\sin(y-x)}$

$\triangle AED$-ში $\frac{AL}{LD} = \frac{AE}{ED} \cdot \frac{\sin(90+y-x)}{\sin(90-y)} \Rightarrow \frac{AL}{LH} = \frac{AE}{ED} \cdot \frac{\sin(90+y-x)}{\sin(90-y)} \cdot \frac{\sin(x+y)}{\sin(y-x)}$

ანუ ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$ctg(x+y-90) \cdot tg(90-y+x) = \frac{AE}{ED} \cdot \frac{\sin(90+y-x)}{\sin(90-y)} \cdot \frac{\sin(x+y)}{\sin(y-x)}$$

$\triangle EAD$-დან $\frac{AE}{ED} = \frac{\sin(90-y)}{\sin(x+y-90)}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №		28.04.2012/ მათ/ III/ 260

ამოცანა № 2 — გვერდი № 3

$\angle ELA = 180-2y \Rightarrow \angle HEL = 180-(y+x)-(180-2y) = y-x \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HZL = \angle LZO = y-x \Rightarrow LZ$ არის ბისექტრისა $\angle HZO$-ს.

$\angle HEO = \angle HDO = y-x \Rightarrow HEDO$ ცვეთილია, ხოლო Z იყოს EDO-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი ამიტომ $EZ=ZH=ZO=ZD$.

EHOD
EHLZ
LZDO

ეს სამივე ცვეთილი ოთხკუთხედია, ამიტომ მათ ხარისხოვანი ღერძები იკვეთებიან ერთ წერტილში $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ EH; OD; და LZ იკვეთებიან ერთ წერტილში, ხოლო EH და OD იკვეთებიან K-ში $\Rightarrow$ $K; L; Z$ ერთ

წრფეა.

$\angle OHZ = y-x+x = y = \angle HOZ$, ხოლო $\angle HZO = y-x+y-x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y-\cancel{2x}+2y = 180 \Rightarrow 2y-x = 90$, ხოლო ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$ctg(x+y-90)\cdot tg(90-y+x) = \frac{\sin(\cancel{90-y})}{\sin(x+y-90)}\cdot\frac{\sin(90+y-x)}{\sin(\cancel{90-y})}\cdot\frac{\sin(x+y)}{\sin(y-x)}$$

$$\cancel{\sin}\quad tg(x+y)\cdot ctg(y-x) = \cancel{\cos}\ \frac{\cos(y-x)\cdot\sin(x+y)}{\sin(y-x)\cdot\cos(x+y)}$$

რ.დ.ვ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/260

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება იმაზე, რომ ვაჩვენოთ ამ მიმდევრობაში, ~~რომ~~ მოიძებნება უსასრულოდ ბევრი სრული კვადრატი. თუ ვაჩვენებთ, რომ უსასრულოდ ბევრი სრული კვადრატია ამ მიმდევრობაში მაშინ ცხადია, რომ ყოველთვის ისეთი $k \geq m$ და a_k სრული კვადრატი სადაც m ნებისმიერი რიცხვი გვხდება იქნება.

შემოვიღოთ მიმდევრობა $b_{i+1}=\sqrt{a_i+1}$, თუ ვაჩვენებთ, რომ ამ მიმდევრობაში უსასრულოდ ბევრი ნატურალური რიცხვია, მაშინ ცხადია, რომ ამოცანა ამოხსნილია ვთქვათ რაიმე მთელი რიცხვია b_k და $a_n = b_k^2$ => ვაჩვენოთ, რომ მოიძებნება ისეთი i, რომ b_i იქნება ~~მთ~~ ნატურალური

=> $b_k^2 < a_{n+1} = b_k^2 + b_k < (b_k+1)^2$, თუ $b_k=0$, მაშინ ცხადია, რომ ამოცანა ამოხსნილია => $b_k \neq 0$

$$b_k^2 < a_{n+2} = b_k^2 + b_k + b_k = b_k^2 + 2b_k < (b_k+1)^2$$

$a_{n+3} = b_k^2 + 2b_k + b_k = b_k^2 + 3b_k$ თუ $b_k = 1$, მაშინ a_{n+3} არის სრული კვადრატი და ამოცანა ამოხსნილია. თუ $b_k \neq 1$ =>

~~$a_{n+3} < b$~~

$$(b_k+1)^2 < a_{n+3} < (b_k+2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+4} = b_k^2 + 3b_k + b_k + 1 = b_k^2 + 4b_k + 1$$

$$(b_k+1)^2 < a_{n+4} < (b_k+2)^2 \Rightarrow$$

$$a_{n+4} = b_k^2 + 4b_k + 1 + b_k + 1 = b_k^2 + 5b_k + 2$$

=> თუ $b_k = 2$, მაშინ a_{n+4} სრული კვადრატი ყოველთვის

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 260

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

და ამოცანა ამოიხსნება, ... ასე, რომ გავაგრძელოთ მსჯელობა, რომ
ნკ არცერთ მთელ რიცხვი არ ყოფილა ეს ნი [illegible], მაგრამ
ნკ ავიღოთ ჩვენ მთელი.
7 ამ ამოცანის იმის ჩვენებით ყოფნის, რომ ამ მიმდევრობაში
ერთ სხვა [illegible], მაინც მოიძებნება.