II ტური

4. იპოვეთ ყველა შესაძლო $f: R \to R$ ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი $x, y \in R$ რიცხვებისთვის სრულდებოდეს: $f(x + yf(x)) = f(f(x)) + xf(y)$.

ამოხსნა

ა) ჩავსვათ $x = 0$. მივიღებთ $f(yf(0)) = f(f(0))$. დავუშვათ $f(0) \neq 0$. ავიღოთ $y = \dfrac{t}{f(0)}$. მივიღებთ $f(t) = f(f(0)) = c$ ნებისმიერი t–თვის, ე. ი. f მუდმივი ფუნქციაა. მაშინ თავდაპირველი განტოლებიდან მივიღებთ $c = c + cx$, $x \in R$, საიდანაც x–ის ნებისმიერობის გამო გვექნება, რომ $c = 0$. ეს კი ეწინააღმდეგება $f(0) \neq 0$ დაშვებას. ამრიგად $f(0) = 0$.

ბ) დავუშვათ $f(x) = 0$ რაიმე $x \neq 0$–ისთვის. მაშინ თავდაპირველი განტოლებიდან მივიღებთ $xf(y) = 0$ ყოველი $y \in R$–ისთვის, საიდანაც $f(y) = 0$ ყოველი $y \in R$–ისთვის.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f(x) = 0$, $x \in R$ არის თავდაპირველი განტოლების ამონახსნი.

გ) თუ $y = 0$, მაშინ $f(x) = f(f(x))$ და თავდაპირველი განტოლება მიიღებს სახეს: $f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y)$

ვთქვათ $f(1) = a \neq 0$. მაშინ

$x = 1, y = 1 \Rightarrow f(1 + a) = 2a$,

$x = 1, y = -1 \Rightarrow f(1 - a) = a + f(-1)$,

$x = 1 + a, y = -1 \Rightarrow f(1 - a) = f(1 + a - 2a) = 2a + (1 + a)f(-1)$.

მიღებული ტოლობებიდან გვექნება: $a + f(-1) = 2a + (1 + a)f(-1)$, საიდანაც $f(-1) = -1$ და შესაბამისად $f(1 - a) = a - 1$.

მეორე მხრივ $x = 1 - a, y = 1 \Rightarrow 0 = f(1 - a + a - 1) = a - 1 + (1 - a)a = -(a - 1)^2 \Rightarrow a = 1$, ე. ი. $f(1) = 1$. მაშინ

$x = 1 \Rightarrow f(1 + y) = 1 + f(y)$ და $x = -1 \Rightarrow f(-1 - y) = -1 - f(y)$

საიდანაც $-f(y) = 1 + f(-1 - y) = f(-y)$.

თუ $f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y)$ განტოლებაში ავიღებთ $y = -1$, გვექნება $f(x - f(x)) = f(x) - x$.

ამრიგად

$$f(x - f(x)) = f(f(x - f(x))) = f(f(x) - x) = -f(x - f(x)) \Rightarrow f(x - f(x)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f(x) = x$, $x \in R$ არის თავდაპირველი განტოლების ამონახსნი.

პასუხი: $f(x) = 0$, $x \in R$ და $f(x) = x$, $x \in R$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $f(0)=0$;
ბ) დაადგინა, რომ $f(x)=0$, $x \in R$ არის განტოლების ამონახსნი;
გ) დაადგინა, რომ $f(-1)=-1$;
დ) დაადგინა, რომ $f(1)=1$;
ე) დაადგინა, რომ $-f(y)=f(-y)$;
ვ) დაადგინა, რომ $f(x-f(x))=f(x)-x$;
ზ) დაადგინა, რომ $f(x)=x$, $x \in R$ არის განტოლების ამონახსნი;

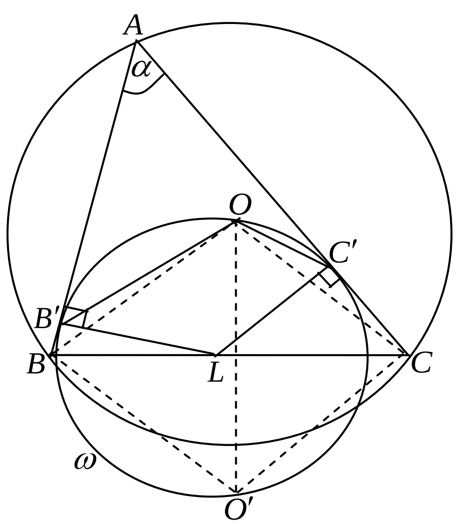
შეფასების სქემა

1 ქულა- ა)
2 ქულა- ა), ბ)
3 ქულა- ა), ბ), გ)
4 ქულა- ა), ბ), გ), დ)
5 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

შენიშვნა: 1) თუ ზეპირად დაასახელა ერთ–ერთი ამონახსნი და შეამოწმა 1ქ;
2) თუ ზეპირად დაასახელა ორივე ამონახსნი და შეამოწმა 2ქ;

5. ვთქვათ, ABC არის მახვილკუთხა სამკუთხედი, ხოლო ω არის წრეწირი, რომლის L ცენტრი მდებარეობს BC გვერდზე და ეხება AB და AC გვერდებს შესაბამისად B' და C' წერტილებში. ვთქვათ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის O ცენტრი მდებარეობს ω წრეწირის უმცირეს $B'C'$ რკალზე. დაამტკიცეთ, რომ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი და ω წრეწირი იკვეთება ორ წერტილში.

ამოხსნა



ცხადია, რომ B' და C' წერტილები იქნება შესაბამისად AB და AC გვერდების შიგა წერტილები, ხოლო O წერტილი მდებარეობს $AB'C'$ სამკუთხედის შიგნით, ამიტომ $\angle COB < \angle C'OB'$.

ვთქვათ $\angle CAB = \alpha$, მაშინ $\angle COB = 2\alpha$. ამავე დროს $\angle C'OB' = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle C'LB') =$

$= \frac{1}{2}(360^\circ - (180^\circ - \alpha)) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

ამრიგად, გვაქვს:

$2\alpha = \angle COB < \angle C'OB' = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, საიდანაც ვიღებთ, რომ $\alpha < 60^\circ$.

ვთქვათ O' არის O წერტილის სიმეტრიული BC წრფის მიმართ. $ABO'C$ ოთხკუთხედიდან გვაქვს: $\angle CO'B + \angle CAB = \angle COB + \angle CAB = 2\alpha + \alpha < 180^\circ$, რაც იმას ნიშნავს, რომ O' წერტილი მდებარეობს ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის გარეთ.

ამრიგად O' და O წერტილები არიან ω წრეწირის წერტილები, რომელთაგან ერთი მათგანი მდებარეობს ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის შიგნით, ხოლო მეორე კი — გარეთ, რაც იმას ნიშნავს, რომ წრეწირები იკვეთება ორ წერტილში.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $\angle COB < \angle C'OB'$;

ბ) დაადგინა, რომ $\angle C'OB' = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$;

გ) დაადგინა, რომ $\alpha < 60^\circ$;

დ) განიხილა O' წერტილი, რომელიც არის O წერტილის სიმეტრიული BC წრფის მიმართ

ე) დაადგინა, რომ $\angle CO'B + \angle CAB < 180^\circ$;

ვ) დაადგინა, რომ O' წერტილი მდებარეობს ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის გარეთ.

ზ) დაადგინა, რომ წრეწირები იკვეთება ორ წერტილში.

შეფასების სქემა

1 ქულა- ა)
2 ქულა- ა), ბ)
3 ქულა- ა), ბ), გ)
4 ქულა- ა), ბ), გ), დ)
5 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

6. იპოვეთ $\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}$ გამოსახულების მინიმალური მნიშვნელობა, სადაც a, b და c ისეთი არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებია, რომ $a+b+c=1$. (პასუხი დაასაბუთეთ)

ამოხსნა

ადვილი შესამოწმებელია, რომ როცა $0 \leq x \leq 1$, მაშინ მართებულია უტოლობა

$$\frac{1}{x^2-2x+5} \geq \frac{x+4}{20}. \qquad (*)$$

მართლაც, გვაქვს $\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{x+4}{20}=\frac{-x^3-2x^2+3x}{20(x^2-2x+5)}=\frac{x(x+3)(1-x)}{20(x^2-2x+5)} \geq 0$.

თუ (*) უტოლობაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ a-ს , შემდეგ b-ს, ხოლო შემდეგ c-ს და მიღებულ უტოლობებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5} \geq \frac{a+b+c+12}{20}=\frac{13}{20}.$$

ამრიგად, შესაფასებელი გამოსახულება მეტია ან ტოლი $\frac{13}{20}$, როცა a, b , c არაუარყოფითი რიცხვებია და $a+b+c=1$.

ახლა შევნიშნოთ, რომ თუ $a=b=0$ და $c=1$, მაშინ $\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}=\frac{13}{20}$. ამრიგად შესაფასებელი გამოსახულების მინიმალური მნიშვნელობა არის $\frac{13}{20}$.

პასუხი: $\frac{13}{20}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიხვდა, რომ მინიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა, როცა ორი პარამეტრი ნულია, ხოლო მესამე 1, ანუ მიხვდა პასუხს;

ბ) მიხვდა $\frac{1}{a^2-2a+5}$ გამოსახულების წრფივი ფუნქციით შეფასებას;

გ) დაამტკიცა (*) უტოლობა;

დ) ზუსტად შეაფასა ამოცანაში მოცემული გამოსახულება ქვემოდან ;

ე) აჩვენა, რომ ეს მნიშვნელობა მიიღწევა;

შეფასების სქემა

1ქ –ა);
1ქ – ბ);
5ქ – გ);
6ქ – დ);
7ქ – დ) და ე).