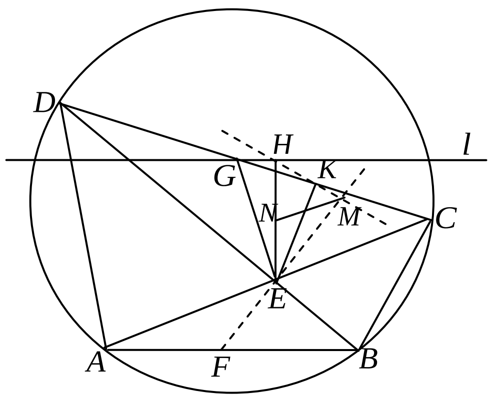
I ტური

1. ვთქვათ $ABCD$ არის წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე გვერდები არ არის პარალელური და რომლის დიაგონალები იკვეთება E წერტილში. F და G არიან შესაბამისად AB და CD გვერდების შუაწერტილები, ხოლო l არის G წერტილზე გამავალი წრფე, რომელიც AB წრფის პარალელურია. E წერტილიდან l წრფეზე და CD გვერდზე დაშვებული მართობების ფუძეები არიან შესაბამისად H და K წერტილები. ვთქვათ M არის EF და HK წრფეების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო N არის EH მონაკვეთის შუაწერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $EH = 2MN$.

ამოხსნა



შევნიშნოთ, რომ E, G, H და K წერტილები მდებარეობს ერთ წრეწირზე, ამიტომ $\angle EHK = \angle EGK$.

ცხადია, რომ EAB და EDC სამკუთხედები მსგავსია, ამიტომ მსგავსი იქნება EFB და EGC სამკუთხედებიც. მაშინ

$$\angle EFB = \angle CGE = \angle KHE.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $FB \perp HE$, მივიღებთ, რომ $EF \perp HK$. მაშასადამე $\angle HME = 90^\circ$.

ამრიგად HEM მართკუთხა სამკუთხედში MN არის ჰიპოტენუზისადმი გავლებული მედიანა, ამიტომ $EH = 2MN$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ E, G, H და K წერტილები მდებარეობს ერთ წრეწირზე;
ბ) დაადგინა, რომ $\angle EHK = \angle EGK$;
გ) დაადგინა, რომ EAB და EDC სამკუთხედები მსგავსია;
დ) დაადგინა, რომ EFB და EGC სამკუთხედები მსგავსია;
ე) დაადგინა, რომ $\angle EFB = \angle KHE$;
ვ) დაადგინა, რომ $\angle HME = 90^\circ$;
ზ) დაადგინა, რომ $EH = 2MN$.

შეფასების სქემა

1 ქულა- ა)
2 ქულა- ა), ბ)
3 ქულა- ა), ბ), გ)
4 ქულა- ა), ბ), გ), დ)
5 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

2. ინტერნეტ ფორუმში მონაწილეობს 2012 პიროვნება. ყოველ მათგანს ჯგუფში ”მეგობრები” ჰყავს არანაკლებ 1341 ადამიანი დანარჩენი 2011 მონაწილიდან. დაამტკიცეთ, რომ შესაძლებელია მოხდეს ისე, რომ ამ ფორუმის ყოველ ოთხ მონაწილეს შორის მოიძებნოს ისეთი ორი მონაწილე, რომლებიც ერთმანეთის “მეგობრებში” არ არიან. (იგულისხმება, რომ თუ პიროვნება a წერია პიროვნება b -ს “მეგობრებში”, მაშინ b-ც წერია a-ს “მეგობრებში”) .

ამოხსნა

აღვნიშნოთ ფორუმში მონაწილე პიროვნებები $a_{1,}\, a_{2,} \dots, a_{2012}$ -ით. განვიხილოთ შემდეგი სამი სიმრვალე $X = \{a_{1,}\, a_{2,} \dots, a_{670}\}$, $Y = \{a_{671,}\, a_{672,} \dots, a_{1341}\}$ და $Z = \{a_{1342,}\, a_{1343,} \dots, a_{2012}\}$.

სიტუაცია, რომელზედაც ამოცანაშია საუბარი, მოხდება მაგალითად შემდეგ შემთხვევაში: ვთქვათ , X სიმრავლის ყოველ ელემენტს ჯგუფში ”მეგობრები” ჰყავს მხოლოდ და მხოლოდ ის პიროვნებები, რომლებიც ეკუთვნიან ან Y ან Z სიმრავლეს, ანუ სულ 1342 პიროვნება, ანალოგიურად Y სიმრავლის ყოველი პიროვნების მეგობარს წარმოადგენს მხოლოდ $X \cup Z$ სიმრავლის ელემენტები, ანუ სულ 1341 პიროვნება და Z სიმრავლის ყოველი ელემენტის მეგობრები არიან მხოლოდ ის პიროვნებები, რომლებიც ეკუთვნიან $X \cup Y$ სიმრავლეს, ანუ სულ 1341 პიროვნება. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ამოცანის პირობა შესრულებულია , ანუ ინტერნეტ ფორუმის თითოეულ მონაწილეს ჯგუფში ”მეგობრები” ჰყავს არანაკლებ 1341 პიროვნებისა.

განვიხილოთ ახლა ფორუმის ნებისმიერი ოთხი მონაწილე, a, b, c და d. ცხადია, რომ ამ ოთხიდან ორი მაინც არის ან X სიმრავლის ელემენტი, ან Y სიმრავლის ელემენტი, ან Z სიმრავლის ელემენტი და მაშასადამე, ერთმანეთის ”მეგობრები” არ არიან. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოხსნის ეტაპები

ა) ფორუმში მონაწილეთა სიმრავლე დაყო ჯგუფებად ან შენიშნა, რომ $1341 = \left[\frac{2\cdot 2012}{3}\right]$;

ბ) მიხვდა იმას, რომ ერთი ჯგუფის ყოველ პიროვნებას მეგობრები უნდა ჰყავდეს მხოლოდ და მხოლოდ სხვა ჯგუფებში;

გ) ფორუმში მონაწილეთა სიმრავლე დაყო სამ ”ტოლ” ჯგუფად;

დ) ბ)-ს გათვალისწინებით აჩვენა, რომ ნებისმიერი ოთხი მონაწილიდან ორის მაინც ერთ ჯგუფში მოხვედრა ამთავრებს ამოცანის ამოხსნას;

შეფასების სქემა

1ქ – ა) ან ბ)

2ქ – ა) და ბ)

5ქ – ბ) და გ)

7ქ – გ) და დ)

3. ვთქვათ, a და b ისეთი მთელი რიცხვებია, რომ ტოლობა $a - b = a^n \cdot c - b^n \cdot d$, სრულდება რომელიღაც მთელი დადებითი n რიცხვისათვის და ისეთი მთელი c და d რიცხვებისათვის, რომელთათვისაც $|c - d| = 1$. დაამტკიცეთ, რომ $\sqrt[n]{|a-b|}$ მთელი რიცხვია.

ამოხსნა

თუ $a = b$ ან $n = 1$, მაშინ ამოცანა ცხადია. ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ $a \neq b$ და $n \geq 2$. განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა, როცა $d = c + 1$. გვექნება $a - b = (a^n - b^n) \cdot c - b^n$ ანუ

$$b^n = (a^n - b^n) \cdot c - (a - b) = (a - b) \cdot ((a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \cdots + b^{n-1}) \cdot c - 1). \qquad (*)$$

დავამტკიცოთ, რომ $a - b$ და $(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \cdots + b^{n-1}) \cdot c - 1$ რიცხვები თანამარტივია, ანუ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი არის 1. მართლაც, თუ $|a - b| = 1$ მაშინ დასამტკიცებელი არაფერია. თუ $|a - b| \neq 1$, მაშინ განვიხილოთ მარტივი რიცხვი p, რომელიც არის $(a - b)$-ს გამყოფი.

(*) ტოლობიდან ცხადია, რომ p ყოფს b^n-ს, ანუ p-ს მარტივობის გამო p ყოფს b-ს. ე.ი. $p|(b + (a - b))$-ს, ანუ p ყოფს a-საც. აქედან კი ცხადია, რომ $p|(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \cdots + b^{n-1})$ და ამიტომ არ ყოფს $(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \cdots + b^{n-1}) \cdot c - 1$-ს. ამრიგად (*) ტოლობიდან და დამტკიცებულიდან ცხადია, რომ $|a - b|$-ს მარტივ მამრავლებად დაშლაში, ყოველი მარტივი რიცხვი მონაწილეობს n-ის ჯერადი ხარისხით, რაც ცხადია, ნიშნავს იმას, რომ $\sqrt[n]{|a-b|}$ მთელი რიცხვია. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა. შემთხვევა, როცა $c = d + 1$ ანალოგიურად გვაძლევს დასამტკიცებელს. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა $d = c + 1$ ან $c = d + 1$ შემთხვევა და ამოცანაში მოცემული ტოლობა ჩაწერა (*) ფორმით ;
ბ) მიხვდა იმას, რომ (*) ფორმულის მარჯვენა მხარის თანამამრავლები თანამარტივი რიცხვებია.
გ) დაამტკიცა ბ)
დ) დაამტკიცა გ)-ს გამოყენებით, რომ $|a - b|$-ს მარტივ მამრავლებად დაშლაში ყოველი მარტივი რიცხვი მონაწილეობს n-ური ხარისხით;
ე) აღნიშნა, რომ მეორე შემთხვევაშიც დამტკიცება ანალოგიურია;

შეფასების სქემა

2ქ – ა)
3ქ –ა) და ბ)
5ქ – გ)
6ქ – დ)
7ქ-დ) და ე)